

4 Teoria dos Jogos e Jogos de Opções Reais

4.1. Teoria dos Jogos Tradicional

4.1.1. Introdução e Conceitos de Equilíbrio

Esse capítulo analisa a interação estratégica entre firmas de uma forma endógena, i. é, considera dentro do modelo as possíveis ações e reações racionais das outras firmas que afetam o valor de uma firma, de um projeto ou de um conjunto de projetos. Isso é feito com a teoria dos jogos, teoria também reconhecida com o Prêmio Nobel de Economia (para Nash, Harsanyi e Selten em 1994). O foco maior é em jogos não-cooperativos, que tem maior relevância em finanças e em microeconomia, mas será visto também um importante jogo cooperativo de barganha, baseado uma lista de axiomas de Nash.

Na década de 80 e no início da década de 90, os modelos de opções reais (OR) ainda consideravam de forma *exógena* a ação de outras firmas para traçar a política de exercício ótimo das OR²⁶². A partir de Smets (1993) e principalmente a sua popularização com Dixit & Pindyck (1994, cap. 9) e Trigeorgis (1996, item 9.3), a combinação híbrida OR com a teoria dos jogos – os jogos de opções reais – tornou-se crescentemente popular e em muitos casos necessária para capturar aspectos fundamentais do exercício ótimo de OR e do valor dessas OR. Para estudar os jogos de OR, é importante estudar a teoria dos jogos tradicional.

Serão abordados sucintamente os principais conceitos da teoria dos jogos – sem propor uma nova abordagem como no cap. 3 – e descritos alguns jogos de interesse para a tese e para companhias de petróleo. Em seguida serão analisados

²⁶² Exs.: Kester (1984) considerou um *tempo de expiração finito* da OR, com esse tempo sendo função da entrada estimada de competidores destruindo o valor da opção; Trigeorgis (1986, 1991), onde o efeito de preempção do competidor é modelado como *dividendos adicionais* que são perdidos pelos proprietários das (não-exercidas) OR; e de novo em Trigeorgis (1986, 1991), onde a entrada do competidor é modelada com um *processo de Poisson*, onde a chegada aleatória do competidor causa um salto para baixo (“jump-down”) no valor do projeto.

jogos de opções reais, em que algumas novidades são mostradas. Por trabalhar com resultados mais conhecidos, o cap. 4 será um pouco mais informal do que o anterior. É deixada para o cap. 5, uma aplicação mais detalhada de jogos de OR na área de exploração de petróleo onde, além de combinar jogos não-cooperativos com cooperativos, é usada a teoria desenvolvida no cap. 3 como um fator muito importante para quantificação do modelo e para justificar uma *troca de jogos*.

Do ponto de vista de aplicações em finanças e economia, a teoria dos jogos moderna começa com John Nash na década de 50. O chamado “equilíbrio de Nash” ocupou praticamente todo o espaço de conceitos antigos de equilíbrio como o chamado *equilíbrio minimax*²⁶³. Além disso, Nash desenvolveu o mais importante modelo de jogo cooperativo, resolvendo um impasse da teoria econômica, relativo aos jogos de barganha²⁶⁴.

Agora serão feitas algumas definições de maneira relativamente informal. Maiores detalhes e uma maior formalização podem ser achados em bons livros-texto de nível de pós-graduação, tais como Mas-Colell & Whinston & Green (1995, caps. 7, 8 e 9) e Fudenberg & Tirole (1991).

Defini-se estratégia de um jogador s_i como um plano contingente completo (ou regra de decisão) que descreve as ações a serem tomadas em cada possível evolução do jogo onde o jogador é chamado para jogar. Estratégias ótimas devem levar em conta as estratégias dos outros jogadores, denotadas por s_{-i} .

Um jogo é descrito especificando os jogadores, as regras, os possíveis resultados e os valores (“payoffs”) desses resultados. Eles podem ser apresentados na forma normal (ou estratégica, usando matrizes), denotado por Γ_N , ou mais detalhadamente, na forma extensiva (através de uma *árvore de jogos*²⁶⁵), denotada por Γ_E . Aqui o jogo é assumido ser de memória perfeita, i. é, uma jogadora nunca esquece a informação que sabia antes de chegar até aquele estágio do jogo.

Aqui serão vistos principalmente, mas não só, jogos de informação perfeita, onde o jogador sabe a cada instante em que nó de decisão ele está numa árvore de jogo. Formalmente, cada conjunto de informação só contém um nó de decisão.

²⁶³ Hoje é mais usada na matemática, por ex., como aplicação do teorema de separação do hiperplano (uma maneira de deduzir o teorema minimax). Livros textos modernos focados em economia mal mencionam o equilíbrio minimax (ex.: Fudenberg & Tirole, 1991), focando em equilíbrio de Nash e derivados (ex.: perfeito, Markoviano, Bayesiano, etc.).

²⁶⁴ O problema era considerado indeterminado, dependia das “habilidades” de negociar, etc.

²⁶⁵ A árvore de jogos é uma árvore de decisão generalizada para múltiplos decisores.

Também aqui se assume conhecimento comum (“common knowledge”), i. é, os jogadores conhecem a estrutura do jogo (inclusive os valores) e sabem que os outros conhecem, que sabem que os outros sabem que ele conhece, etc.

Um perfil de estratégias de um jogo com J jogadores é um vetor $s = (s_1, s_2, \dots, s_j)$ em que s_i é a estratégia escolhida pelo jogador i. Esse perfil de estratégias também pode ser escrito como (s_i, s_{-i}) para ressaltar o ponto de vista do jogador i em relação aos J – 1 outros jogadores.

Quando a estratégia é escolhida de forma determinística, ela é chamada de estratégia pura, onde o jogador i escolhe a estratégia $s_i(H)$ a cada conjunto de informação H. Quando um jogador escolhe de forma probabilística uma estratégia de seu conjunto de estratégias puras, se diz que ele escolheu uma estratégia mista. Assim, dado um conjunto de estratégias puras \mathcal{S}_i , uma estratégia mista para um jogador i é uma função $\sigma_i: \mathcal{S}_i \rightarrow [0, 1]$, que assinala a cada estratégia pura $s_i \in \mathcal{S}_i$, uma probabilidade $\sigma_i(s_i) \geq 0$. Essas probabilidades somam 1 quando se considera todas as estratégias puras desse conjunto. A estratégia pura pode ser vista como uma estratégia mista *degenerada* (probabilidade 1 para a estratégia escolhida e zero para as demais).

O valor de uma estratégia mista é um valor esperado dos valores (“payoffs”) das estratégias puras ponderados pelas probabilidades relevantes. Na teoria dos jogos tradicional, que em muitos casos analisa as decisões de indivíduos como jogadores, e não firmas, é usada a função utilidade esperada. No caso de firmas, a teoria de finanças em geral recomenda que se use um valor de mercado de um ativo (de risco ou não) e não as preferências individuais de um gerente, por ex. Por isso, como essa tese foca em decisões de firmas com acionistas diversificados, como função valor será usada ou o VPL ou o próprio valor de opções reais. No caso geral, o valor para o jogador i será denotado por V_i .

Seja $V_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ o valor da estratégia mista σ_i para o jogador i quando os demais jogam as estratégias mistas σ_{-i} . A estratégia σ_i é a melhor resposta de i para o perfil σ_{-i} de J – 1 estratégias mistas dos outros jogadores se:

$$V_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq V_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \quad , \quad \text{para qualquer } \sigma_i' \in \Delta(\mathcal{S}_i) \quad (244)$$

Onde $\Delta(\mathcal{S}_i)$ é o conjunto simplex do conjunto das estratégias puras \mathcal{S}_i . O simplex é uma extensão do conjunto de estratégias puras que assinala os conjuntos de probabilidades a todas as M estratégias puras disponíveis para o jogador i .

Uma estratégia pura $s_i \in \mathcal{S}_i$ é dita estritamente dominada para o jogador i , se existe uma estratégia $s_i' \in \mathcal{S}_i$ tal que para todas as estratégias dos outros jogadores ($\forall s_{-i}' \in \mathcal{S}_{-i}$) vale a desigualdade:

$$V_i(s_i, s_{-i}) < V_i(s_i', s_{-i}) \quad , \quad \text{para qualquer } s_{-i}' \in \mathcal{S}_{-i} \quad (245)$$

Diz-se que s_i é estritamente dominada por s_i' e assim a estratégia s_i pode ser excluída, pois ela não deve ser jogada por jogadores racionais. A definição para o caso de estratégias mistas é similar. Na eq. (245), se no lugar da desigualdade estrita “<”, se tiver a desigualdade não estrita “≤”, então a estratégia s_i é chamada de estratégia fracamente dominada. Essas, em geral, não devem ser excluídas a priori (podem ser equilíbrios de Nash), mas geralmente são excluídas em equilíbrios mais refinados como o equilíbrio perfeito em subjogos.

Definição. Equilíbrio de Nash: O perfil de estratégias $s = (s_1, s_2, \dots, s_J)$ é um equilíbrio de Nash (EN) em estratégias puras de um jogo bem definido se, para *todo* jogador $i = 1, 2, \dots, J$, vale a desigualdade:

$$V_i(s_i, s_{-i}) \geq V_i(s_i', s_{-i}) \quad , \quad \text{para qualquer } s_i' \in \mathcal{S}_i \quad (246)$$

O equilíbrio de Nash implica que as estratégias que fazem parte desse equilíbrio são simultaneamente as melhores respostas para todos os jogadores. Dessa forma, não há incentivo para nenhum jogador desviar desse equilíbrio, unilateralmente. Para saber se é equilíbrio de Nash, basta fazer a seguinte pergunta *a cada* jogador separadamente: mudando a sua estratégia você ficaria melhor (aumentaria o valor V_i)? Se as respostas de todos os jogadores forem negativas, então é um EN.

A definição de EN para estratégias mistas é similar à definição apresentada para estratégias puras (observar também a notação da definição de *melhor resposta*, que foi feita para estratégias mistas). Uma condição necessária e suficiente para o perfil σ ser EN, é que cada jogador, dado os que os outros estão fazendo, é indiferente entre todas as estratégias puras que ele joga com

probabilidades positivas e que essas estratégias são pelo menos tão boas quanto as estratégias que tiverem probabilidades zero.

Outro resultado importante para EN para estratégias mistas é que, para se testar se o perfil σ é EN, basta considerar desvios em estratégias *puras*. Ou seja, para cada jogador i se testa se há incentivo para desviar da estratégia mista σ_i para a estratégia pura s_i . Caso não haja esse tipo de incentivo de desviar, então é EN²⁶⁶.

É oportuno ressaltar que as probabilidades das estratégias mistas *não* são exógenas (estimativas de estados da natureza) e nem são advindas de preferências dos jogadores. Essas probabilidades são resultados da análise de equilíbrio. Essas probabilidades fazem os outros jogadores ficarem indiferentes sobre as estratégias dos mesmos. Portanto, uma maneira prática de estabelecer essas probabilidades dos outros jogadores, é verificar quais as probabilidades σ_{-i} que fariam o jogador i ficar indiferente entre as estratégias disponíveis para o jogador i .

Existência de EN: Todo jogo em que se permitam estratégias mistas e no qual os conjuntos de estratégias puras de todos os jogadores são finitos (número finito de estratégias em cada conjunto), tem pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Já no jogo em que só se permitem estratégias puras, a existência de EN só é garantida em alguns casos, pois o conjunto de estratégias de cada jogador deve ser convexo e para isso deve ter infinitos valores²⁶⁷ (ou seja um contínuo de valores). A imensa maioria dos jogos tem EN, o problema maior é que muitos jogos têm mais de um EN, o que leva ao problema de seleção do melhor EN. Isso leva a uma série de conceitos de equilíbrio para *refinar* o EN.

Em jogos dinâmicos, em geral o EN não é suficiente para descartar estratégias não críveis. O equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (ENPS) é o conceito de equilíbrio mais importante em jogos dinâmicos. A idéia central é o chamado *princípio da racionalidade seqüencial*, em que a estratégia de um jogador deve especificar ações ótimas em todos os pontos da árvore de jogos.

O princípio da retro-indução (“backward induction”) muito conhecido em programação dinâmica e mesmo em OR, analisa a árvore de jogos de trás para frente, i. é, estabelece primeiro as estratégias ótimas nos nós terminais e depois

²⁶⁶ Um corolário é: um perfil de estratégias puras s é EN num jogo de estratégias puras se e somente se é estratégia mista degenerada do jogo em estratégias mistas. Ou seja, pode-se dar a atenção apenas para as estratégias puras que aparecem no equilíbrio do jogo em que só se permite jogar estratégias puras, pois só elas aparecerão (probabilidade positiva) no equilíbrio do perfil σ .

²⁶⁷ Um conjunto com *finitas* estratégias, não é convexo.

vai estabelecendo as estratégias ótimas nos nós anteriores, até chegar no primeiro nó de decisão da árvore. Esse princípio captura o princípio da racionalidade seqüencial e é usado em jogos finitos de informação completa.

Um teorema antigo (1913), devido a Zermelo, permanece de grande relevância prática e hoje pode ser assim formulado: todo jogo finito de informação perfeita tem um EN em estratégias puras que pode ser obtido através de retro-indução. Além disso, se nenhum jogador tiver o mesmo valor (“payoff”) em quaisquer dois nós terminais, então existe um único EN obtido por retro-indução. Esse conceito será visto que está totalmente ligado ao conceito de ENPS. A prova desse teorema constrói as estratégias de equilíbrio usando o chamado “algoritmo de Zermelo”²⁶⁸, que é uma generalização para múltiplos jogadores, da retro-indução da programação dinâmica (Fudenberg & Tirole, 1991, p.91).

Antes de definir formalmente ENPS, deve-se definir subjogo. Subjogo é um subconjunto do jogo Γ_E com as propriedades: (a) começa num conjunto de informação que contém apenas um nó de decisão e contém todos os nós sucessores; (b) não há conjuntos de informação quebrados, i. é, se o nó de decisão x está no subjogo, então cada nó $x' \in H(x)$ (i. é, o conjunto de informação onde está x) também estará no subjogo. Além disso, todo jogo tem pelo menos um subjogo trivial: o próprio jogo.

Definição. Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos: O perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_J)$ no jogo na forma extensiva Γ_E é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (ENPS) se ele induz um EN em cada subjogo de Γ_E .

Para o caso de jogo finito com informação perfeita, o Teorema de Zermelo assegura que existe o ENPS e que ele pode ser único. O ENPS é único caso nenhum jogador tenha os mesmos valores (“payoffs”) em nós terminais quaisquer. Esse ENPS pode ser obtido por retro-indução. Assim, existe uma ligação estreita entre o conceito de ENPS e o de programação dinâmica, muito usada em OR (Dixit & Pindyck, 1994, cap.4). Todo ENPS é um EN, mas o inverso nem sempre é verdade. O conceito de ENPS é devido a Selten.

Nos casos de jogos infinitos, a definição de ENPS permanece no sentido de que induz EN em todos os subjogos. No entanto, o ENPS pode perder um pouco

²⁶⁸ Zermelo usou esse algoritmo em 1912 na análise do *jogo de xadrez* (Binmore, 1992, p.32). Zermelo pode ser visto como o avô da programação dinâmica.

do apelo prático por não existir um nó terminal para fazer a retro-indução. Mas nem sempre o horizonte infinito enfraquece o ENPS (assim como não enfraquece a programação dinâmica²⁶⁹, ver Dixit & Pindyck, 1994, cap. 4). Por ex., em jogos de barganha com horizonte infinito, muitas vezes o conceito de ENPS prediz um único resultado que é o resultado limite de um jogo finito.

Nas aplicações em exploração e produção de petróleo, no entanto, devido à existência de prazos legais para explorar uma concessão e iniciar os investimentos em desenvolvimento, o interesse maior dessa tese é nos casos de jogos finitos. Por um lado isso facilita bastante a análise de equilíbrio (ENPS pode ser obtido por retro-indução simples). Mas por outro lado dificulta a obtenção de resultados teóricos gerais pois o tempo passa a ser variável de estado e assim as soluções analíticas são raras e soluções numéricas são necessárias. A literatura de jogos de OR quase que exclusivamente tem se preocupado com jogos infinitos para obter esses resultados analíticos gerais. Nessa tese, serão vistos ambos os casos, mas para as aplicações de E&P serão focados os jogos finitos de guerra de atrito e barganha. Inicialmente, esses jogos serão analisados sucintamente desde o ponto de vista da teoria dos jogos tradicional. Depois serão vistos em jogos de OR.

Dentre os diversos tipos de jogos dinâmicos, é de particular interesse dessa tese a classe geral de jogos chamada de *jogos de momento ótimo* “timing games” ou *jogos de parada ótima* (“optimal stopping games”), i.é. jogos onde as estratégias puras dos jogadores são escolhas de *tempos de parada* (“stopping times”). Dessa forma, a cada momento, o conjunto de ações de cada firma i é dado por $A_i(t) = \{\text{parar; não parar}\}$, ver, por ex., Fudenberg & Tirole (1991, p.117). Aqui, tempo de parada significa tempo para parar a política de “esperar e ver” e exercer a opção real. Num jogo de dois jogadores, o primeiro a exercer a opção (i. é, o primeiro a “parar”) é chamado de líder (L) e o outro é chamado de seguidor (F, de “follower”).

Esses tipos de jogos podem ser classificados em duas categorias: jogos de *externalidades negativas* (ex., jogos de preempção) e jogos de *externalidades positivas*. Esse último inclui modelos de jogos de guerra de atrito (que será analisado em detalhes nessa tese) e de jogos com *efeitos de rede*. Contrastando

²⁶⁹ Inclusive o jogo ser infinito facilita, pois o tempo deixa de ser variável de estado em opções perpétuas e isso permite soluções analíticas.

com o jogo de guerra de atrito, nos jogos de rede a estratégia de exercício simultâneo das opções (S) é mais valiosa do que um único investimento (ex., a adoção de um novo padrão num mercado de novas tecnologias), de forma que o valor de exercício simultâneo não é menor que o valor de seguidor e geralmente é até mais valioso.

Em jogos estocásticos (não necessariamente jogos de opções), a introdução de uma variável de estado seguindo um processo estocástico (ex., o preço do petróleo P), aumenta o problema de multiplicidade de equilíbrios em jogos tais como os de guerra de atrito. Logo, como é usual em jogos estocásticos, a análise é focada em um tipo de equilíbrio chamado de equilíbrio de Markov. Esse tipo de equilíbrio é função apenas do estado corrente (ex., preço atual do petróleo) o qual segue um processo de Markov (como os processos estocásticos estudados no cap.2). Esse estado corrente sumariza o efeito direto do passado no jogo corrente, ver, por ex., Fudenberg & Tirole (1991, chapter 13)²⁷⁰. Equilíbrios de Markov são também perfeitos em subjogos. Nos jogos de interesse, se procura identificar pelo menos um *equilíbrio perfeito de Markov* (EPM) e, se possível, os EPM que sejam mais prováveis no longo prazo. Por ex., EPM's que sejam estáveis em processos evolucionários (ver item 4.1.5.3).

Outros equilíbrios de interesse, tais como o Bayesiano para jogos de informação incompleta, serão apresentados em tópicos mais específicos a seguir. Nos tópicos seguintes serão resumidos alguns jogos tradicionais importantes.

4.1.2. Guerra de Atrito

4.1.2.1. Introdução

Nessa seção será discutida uma importante classe de jogos chamados de *guerra de atrito*²⁷¹. Uma importante versão de guerra de atrito com opções reais em exploração de petróleo será desenvolvida no cap. 5, por isso será dado relativo destaque para esse jogo. Primeiro, será apresentada sucintamente uma variante mais estática desse *jogo da espera* conhecido como jogo do medroso

²⁷⁰ Ver Kapur (1995) para os equilíbrios perfeitos de Markov em jogos de guerra de atrito.

²⁷¹ Esse item é baseado em Dias (1997) e principalmente em Dias & Teixeira (2004).

(“chicken”)²⁷², o que permitirá ter mais intuição sobre a versão dinâmica de guerra de atrito. Uma versão do jogo do medroso é descrita a seguir. Dois adolescentes dirigem os seus carros em direção do outro. O primeiro a desviar (impedindo a colisão) é o “medroso” e perde o jogo²⁷³. Aqui, o primeiro a exercer a opção, denotado por *líder* (L)²⁷⁴, perde o jogo. Dessa forma, o papel do *seguidor* (F) é mais valioso ($F > L$) nesse jogo. O exercício simultâneo (S) é pior que ser seguidor e igual ou melhor que ser líder, i. é., $F > S \geq L$. Entretanto, ambos os jogadores preferem exercer a opção (medroso) a situação de ambos os jogadores nunca exercendo a opção (“colisão de carros”), i. é., a estratégia de *espera* simultânea (W) tem o menor valor $W < L$. Com esses ordenamentos de valores (“payoffs”), se podem identificar todos os equilíbrios de Nash. A Figura 54 mostra o jogo do medroso na forma estratégica Γ_N e os dois EN existentes em estratégias puras.

		Jogador 2	
		p_2 exercer	$1 - p_2$ esperar
Jogador 1	p_1 exercer	$S_1; S_2$	$L_1; F_2$
	$1 - p_1$ esperar	$F_1; L_2$	$W_1; W_2$

$F_i > S_i \geq L_i > W_i ; i = 1, 2$

○ = Eq. Nash

Figura 54 – Jogo do Medroso (“Chicken”)

Os dois EN em estratégias puras são $(F_1 ; L_2)$ e $(L_1 ; F_2)$ ²⁷⁵. Existe também um EN em estratégias mistas que é uma randomização sobre os dois EN em estratégias puras, com cada jogador $i = 1, 2$, escolhendo a probabilidade p_i para o exercício da opção de forma a *manter seu oponente j indiferente* entre exercer ou

²⁷² Esse jogo é bem discutido em Dixit & Skeath (1999, pp. 9, 110-112, 136-140, 331-334). Ele é mais estático, pois é geralmente analisado usando só a forma normal Γ_N em jogo matricial, sem especificar as estratégias de *parada ótima*. Entretanto, alguns autores (ex., Fudenberg & Tirole, 1991, p.119 n.7) consideram “chicken” apenas um outro nome para o jogo guerra de atrito.

²⁷³ Outra versão desse jogo é mostrada no filme “*Rebel without Cause*” com James Dean. Não se recomenda a prática desse jogo, pelo menos dessas versões perigosas.

²⁷⁴ Foram adotados os termos líder e seguidor pois eles permitem unificar a linguagem e a notação com o caso de preempção que será mostrado no item 4.1.5. O líder move primeiro.

²⁷⁵ Pois não existe incentivo para desviar unilateralmente dessas estratégias.

não a opção²⁷⁶. Essa probabilidade é estratégica, pois é função dos valores do oponente F_j , S_j , L_j , e W_j :

$$p_i = \frac{L_j - W_j}{L_j - W_j + F_j - S_j} \quad (247)$$

Essa probabilidade é estritamente menor que um e estritamente maior que zero porque $F_j > S_j$ e $L_j > W_j$. Note que também são obtidos esses três equilíbrios se ou $S_j = L_j$ ou $S_j > L_j$ (i. é, ambos são jogos do medroso). No entanto, se $F_j = S_j$ ou $L_j = W_j$ existirá apenas um equilíbrio degenerado em estratégias mistas. Esse resultado explica porque foi excluído o caso de $F_j = S_j$ nesse jogo²⁷⁷. Note também que se $L_j \gg W_j$, a probabilidade de exercício p_i é perto de 1, i.é., mesmo com uma alta probabilidade de exercício, o oponente ficará indiferente em exercer ou não a opção porque W é muito baixo (medo de colisão).

Com três EN no jogo do medroso, a pergunta natural é: qual dos três EN é mais provável que os jogadores se coordenem? Esse é um problema comum de um jogo, ter múltiplos EN. Nesse caso, será visto no item 4.1.5.3 (jogos evolucionários) que apenas o EN em estratégias mistas é *estável* em termos evolucionários e assim deve ser o mais provável resultado no longo prazo.

O jogo de guerra de atrito foi introduzido na literatura da teoria dos jogos por Maynard Smith (1974), num jogo em que animais lutam por um prêmio (um território ou uma caça). Existe um custo de permanecer lutando e esse custo é crescente com duração do jogo. Assim, o valor de *nunca parar* (ou mesmo de parar mais tarde) para ambos os jogadores é menor que o valor do jogador conceder (parar) imediatamente. Nesse jogo, se um animal “parar” ele concede o prêmio gerando a externalidade positiva para o outro jogador. Esse é um “prêmio da espera”, de forma que o valor do seguidor é maior que o do líder na guerra de atrito. No improvável caso de exercício *simultâneo* da opção (parada simultânea, com ambos os animais desistindo do combate ao mesmo tempo), ou o jogo é decidido de forma randômica (Maynard Smith, 1982, mas com o ganho esperado menor que o ganho do seguidor, i. é, $F(t) > S(t) > L(t)$) ou nenhum jogador ganha

²⁷⁶ Na verdade os jogadores *não querem* manter os oponentes indiferentes. Essa é apenas uma conhecida *regra de bolso* para estratégias mistas que resulta de um problema de maximização de valor resolvido por cada jogador considerando as melhores respostas do oponente.

²⁷⁷ Existem alguns jogos de externalidades positivas com *efeitos de rede* nos quais $F_j = S_j$ ou mesmo $F_j < S_j$. Entretanto, eles pertencem a outra classe de jogos, com muito fraca relação com o foco dessa tese, i.é., com os jogos do medroso e guerra de atrito.

o prêmio ($F(t) > S(t) = L(t)$, como em Fudenberg & Tirole, 1991, p.119)²⁷⁸. O exercício simultâneo em guerra de atrito é sempre menos valioso do que o valor do seguidor.

Como mencionado antes, a guerra de atrito pertence à classe de jogos de momento (“timing games”) ou jogos de parada ótima e é também conhecido como um *jogo da espera* (“waiting game”). Esse jogo tem muitas aplicações em economia. Na literatura de economia industrial, um exemplo é o exercício da *opção de abandono* em duopólios de *indústrias declinantes*. Nesse tipo de indústria, a saída (ou abandono) de uma firma beneficia a outra firma, pois a firma remanescente torna-se monopolista e assim obtém uma sobrevivida lucrativa (Ghemawat & Nalebuff, 1985). Fudenberg & Tirole (1986) analisaram o mesmo caso, mas com foco em indústria *não* declinantes. Outro exemplo de guerra de atrito vem da literatura de *jogos de barganha não cooperativos*, ver, por ex., Ordover & Rubinstein (1986). Jogos de barganha não cooperativos são guerras de atrito no sentido que os jogadores são impacientes (existe um custo de adiar o acordo), as propostas são fixas (o prêmio é a diferença entre as propostas), mas o acordo requer a aprovação de ambos os jogadores, de forma que um dos jogadores deve conceder (parar) para poder fechar o acordo.

4.1.2.2.

O Jogo da Espera na Perfuração Exploratória

O foco dessa tese será numa interessante aplicação do jogo guerra de atrito que surge em exploração de petróleo. Nessa aplicação a externalidade positiva é mais sutil: o exercício da opção pelo líder gera uma *revelação de informação* que beneficia o outro jogador (o seguidor), o qual pode usar essa informação grátis (a firma é chamada de “free rider”) para decidir sobre o seu próprio exercício da opção. No contexto da teoria dos jogos tradicional, esse caso tem sido objeto de pesquisa principalmente por parte de Hendricks (exs., Hendricks & Porter, 1996, ou Hendricks & Wilson, 1985), enquanto que no contexto de jogos de OR, Dias (1997) foi o primeiro a analisar esse jogo. Dias (1997) analisou esse jogo em tempo discreto, usando uma árvore de jogos e retro-indução.

²⁷⁸ No entanto, Huisman (2001, p.100-101) incluiu como guerra de atrito o caso $L(t) > S(T)$, com $t \in [0, T]$. Mas isso difere das definições usuais de guerra de atrito de Fudenberg & Tirole (1991) e Maynard Smith (1982).

Para entender o jogo da perfuração exploratória, considere a Figura 55 em que duas firmas detêm direitos exploratórios em dois blocos vizinhos.

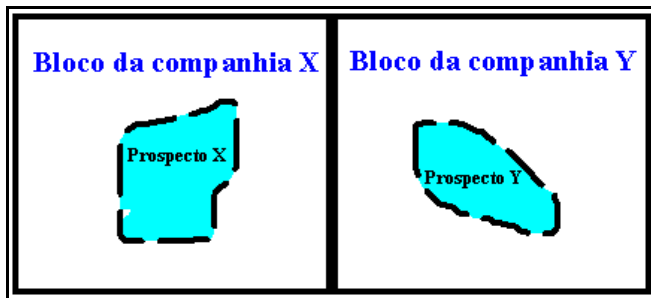


Figura 55 – Prospectos Correlacionados em Blocos Vizinhos

As estruturas dos prospectos (a Figura 55 mostra a vista de topo) foram indicadas pela sísmica 2D e vendidas (pelo governo ou por firmas particulares especializadas em sísmica) para ambas as firmas antes do leilão, de forma que os tamanhos dos prospectos (não necessariamente iguais) são conhecimento comum na maioria dos casos práticos. Também é conhecimento comum que esses prospectos são correlacionados, pois por hipótese eles estão no mesmo play geológico e a sísmica também identifica isso. Mas apenas perfurando o poço exploratório é que será possível comprovar ou não a existência de petróleo. As probabilidades de descobertas são expressas pelos fatores de chance (distribuições de Bernoulli), conforme discutido em detalhes no cap. 3 (item 3.4). Lá foi mostrado como atualizar um fator de chance após a revelação de uma informação, que aqui é a eventual perfuração do prospecto do bloco vizinho. A perfuração de um poço exploratório é um investimento totalmente irreversível (nada se recupera dos insumos gastos) e relativamente caro²⁷⁹. No entanto, se o prospecto for muito atrativo (elevado VME, ver cap.2), então o custo da espera pode ser alto e assim pode ser melhor “perder” o jogo e perfurar logo o prospecto.

Além da revelação sobre a probabilidade de sucesso (revelação de fator de chance), outras revelações podem ser relevantes. Por ex., sobre a qualidade do petróleo (óleo leve ou óleo pesado, gás com H₂S ou não, etc.) e sobre a qualidade da rocha reservatório (se muito ou pouco produtiva). No entanto, como apenas parte da informação é tornada pública, a revelação de fator de chance é a mais importante para o jogo guerra de atrito da perfuração, pois essa informação é tornada pública obrigatoriamente por ser fato relevante para o valor das ações em

²⁷⁹ Um poço exploratório marítimo custa entre US\$ 10 milhões e US\$ 50 milhões, a depender da lâmina d'água e da profundidade da zona de interesse onde está o prospecto.

bolsas de valores e/ou por que o governo (ANP no caso do Brasil) tem interesse em divulgar esse fato para atrair novos investimentos e novas empresas. Essa questão será retomada quando se discutir a possibilidade de trocar de jogo (para um jogo cooperativo de barganha) que será visto no cap. 5 (item 5.4).

O jogo é finito, pois existe um prazo legal para descobrir e assumir um compromisso de investir no desenvolvimento do eventual campo descoberto (ver cap.2). Considere que o prazo legal é igual para ambas as companhias de petróleo, pois é comum que blocos vizinhos tenham sido provenientes do mesmo leilão. Além disso, com a mesma expiração, o jogo fica bem mais interessante: caso os prazos fossem diferentes a interação estratégica seria menor, já que a companhia com prazo mais longo iria provavelmente esperar a perfuração na concessão de prazo mais curto.

Também será assumido que o jogo é restrito a dois jogadores ($J = 2$). Esse caso é importante na prática de negócios da exploração porque é mais comum. Isso porque a revelação de informação de blocos vizinhos (com prospectos no mesmo play geológico) é mais forte ou muito mais forte do que a revelação de áreas mais distantes. Assim, na maioria dos casos só dois blocos adjacentes têm revelação de informação relevante para, na prática, gerar interação estratégica relevante entre duas companhias de petróleo. Entretanto, existem interessantes casos com $J > 2$ jogadores que podem ser analisados de forma similar ao feito nessa tese, por ex., considerando um processo de revelação seqüencial. Alternativamente, pode ser um jogo com dois jogadores, mas considerando que os sinais *mais fracos* ocorrem em paralelo e de forma *exógena*, segundo um processo de revelação (ver cap. 3, item 3.4).

Como mencionado antes, a aplicação na exploração do jogo de guerra de atrito tradicional (i. é, sem opções) foi feita principalmente por Hendricks. Mas aqui existem algumas diferenças. Uma importante diferença em relação, por ex., a Hendricks & Porter (1996), é na modelagem da revelação de informação exploratória, assim como na variável técnica em que se dá o principal impacto dessa revelação de informação. Eles modelaram o volume de reservas com uma distribuição lognormal em que o seu valor esperado é revelado pela perfuração do prospecto vizinho. Entretanto, o impacto maior da informação revelada para o público é sobre o sucesso (descoberta) ou fracasso do investimento, i. é, sobre o fator de chance (FC), conforme discutido no cap.3 (ver item 3.4.1). Existe também

algum impacto público sobre a qualidade esperada do petróleo (anúncio do tipo “foi descoberto petróleo leve”). Mas o impacto sobre o *volume* é muito fraco, uma vez que a sísmica é que pode dar melhor essa informação num prospecto específico, i. é, a sísmica pode indicar uma grande estrutura num bloco e uma pequena estrutura no outro. Ou seja, se for descoberta uma *grande reserva de óleo leve* num bloco, isso aumenta a chance de descoberta no bloco vizinho (e inclusive de ser óleo leve), mas se a estrutura mapeada pela sísmica for pequena, o volume esperado não muda com o resultado do bloco vizinho²⁸⁰. Além disso, a informação mais precisa sobre volume só é publicada após os investimentos em delimitação do campo²⁸¹.

4.1.2.3.

Formalização e Estratégias da Guerra de Atrito

Seguindo Fudenberg & Tirole (1991, p.118), as estratégias puras s_i na guerra de atrito são tempos de parada²⁸², i.é., mapas simples do conjunto de datas para o conjunto de ações factíveis {parar; não parar}. O jogo termina quando pelo menos um jogador pára (exerce sua opção), que no caso exploratório é a perfuração de um poço pioneiro. As *estratégias comportamentais* b_i especificam as probabilidades condicionais $b_i(t)$ de parada em cada instante t se nenhum jogador tiver parado até lá. Já as estratégias mistas são distribuições de probabilidades sobre as estratégias puras s_i . Fudenberg & Tirole apontam também que, dado que as estratégias puras são tempos de parada, é natural identificar estratégias mistas como sendo funções acumuladas de probabilidade $G_i(t)$ para $t \in [0, \infty)$, ou seja, $G_i(t)$ é a probabilidade do jogador i parar antes ou exatamente no instante t . Essa função $G_i(t)$ não precisa ser contínua (pode ter “saltos”).

Considere o caso de interesse (que será detalhado no capítulo 5) de apenas dois jogadores, i e j . Além da justificativa prática vista para o caso da exploração,

²⁸⁰ No entanto, em bacias/regiões inexploradas, o anúncio de um grande volume descoberto, irá incentivar as firmas a entrarem em novos leilões e fazerem investimentos em sísmica para tentar identificar outras grandes estruturas. Mas no caso analisado, se assume que as estruturas de interesse já foram mapeadas pela sísmica.

²⁸¹ Entretanto, alguma informação privada – principalmente detalhes técnicos como a profundidade do contato óleo-água, detalhes da qualidade da rocha e dos fluidos, etc. – pode ser útil para revisar as expectativas em relação ao fator de chance, à qualidade e até do volume do prospecto. Mas como esses detalhes não são revelados para o público, só um acordo de *parceria* poderia fazer a firma do prospecto vizinho ter acesso a esses detalhes. Isso será visto no cap. 5 como um forte incentivo para a cooperação (modelado com as ferramentas do cap. 3).

²⁸² Em termos mais gerais, s_i são *conjuntos de parada* (“stopping sets”), i. é, intervalos de tempo nos quais a parada é ótima.

o caso de dois jogadores é importante em geral para a teoria, pois qualquer análise de J -jogadores ($J > 2$) em jogos finitos começa em retro-indução com um subjogo no qual apenas dois jogadores permanecem (os outros já teriam exercido suas opções). Para o jogador i , denote o valor do líder por $L_i(t)$, o valor do seguidor por $F_i(t)$ e o valor de cada firma no exercício simultâneo por $S_i(t)$, de acordo com os seus tempos de parada:

- Valor do jogador $i = L_i(t)$ se $t_i < t_j$;
- Valor do jogador $i = F_i(t)$ se $t_i > t_j$; e
- Valor do jogador $i = S_i(t)$ se $t_i = t_j$.

Como visto anteriormente, o jogo de interesse (exploração de petróleo) é finito e assim existe uma data T em que a opção expira e o jogo termina (com exercício(s) ou não). Outros exemplos de jogos finitos de guerra de atrito na economia são: (a) na negociação de salários entre gerentes e trabalhadores, a expiração do contrato pode ser vista como a expiração do jogo; (b) na negociação de um contrato com um fornecedor, a data que a firma espera ficar sem estoques pode ser assumida como expiração desse jogo. Ver Ponsati (1995) para outros detalhes sobre jogos finitos de guerra de atrito.

Dessa forma o jogo é definido no intervalo $[0, T]$, e suas estratégias são tempos de parada pertencentes a esse intervalo. Nessa aplicação está claro que a guerra de atrito é sem efeitos de rede, pois o prêmio (revelação de informação) não pode ser usado (para decisão ótima) pelo líder ou mesmo pelos jogadores que exerceram simultaneamente as opções²⁸³. Nesse contexto, a guerra de atrito é caracterizada com as seguintes condições:

$$F_i(t) \geq L_i(t) \quad \text{para } t \in [0, T] \quad (248)$$

$$L_i(t) = S_i(t) \quad \text{para } t \in [0, T] \quad (249)$$

$$L_i(t) \downarrow t \quad \text{para } t \in (0, T) \quad (250)$$

$$F_i(t) \geq F_i(\tau) \quad \text{para } \tau > t, \tau \in (0, T) \quad (251)$$

A condição da eq. (248) diz que a externalidade positiva em geral tem valor e assim o valor do seguidor é maior do que o do líder, ou pelo menos nunca menor. Condição da eq. (249) diz que o exercício simultâneo da opção não gera ganhos para os jogadores. Condição da eq. (250) diz que se for para ser líder, é

²⁸³ Outro exemplo de guerra de atrito *sem* efeitos de rede está na *guerra de preços* em indústrias declinantes: o prêmio (menor competição) não é capturado pela firma que tanto tenha abandonado a indústria sozinha ou simultaneamente.

melhor ser antes do que mais tarde. Isso ocorre de forma similar para o valor do seguidor da eq. (251), que prefere que o rival exerça a sua opção o quanto antes para revelar informação e ele poder *eventualmente*²⁸⁴ exercer uma opção que se revele madura para o exercício imediato. As condições das eqs. (250) e (251) são *ceteris paribus*, i.é., para as mesmas condições de mercado (claro que o valor do líder aumenta se o preço do petróleo aumentar ao longo do tempo). No contexto tradicional, a eq. (250) diz que existe um custo em postergar um projeto de VME positivo. No contexto de jogos de OR, existe um custo (líquido do benefício da espera) de postergar uma opção que está “deep-in-the-money”.

No jogo de exploração de petróleo, se na expiração o jogo ainda for uma guerra de atrito (não tiver exercício em $t < T$), deverá ser colocado adicionalmente uma *condição terminal*, principalmente para o valor do seguidor, em $t = T$. Note que a eq. (248) deixa isso em aberto, propositalmente para dar flexibilidade e evitar descartar jogos de guerra de atrito com diferenças de especificação na condição terminal que não descaracterizam o jogo. Assim, existem pelo menos três alternativas interessantes de condição terminal. Em qualquer caso, note que o seguidor não pode usar a informação revelada *depois* de T , pois sua opção já teria expirado e o bloco devolvido ao governo. A primeira alternativa de condição terminal para o seguidor é colocar a seguinte condição terminal:

$$F_i(T) = 0 \quad (252)$$

Note que essa é a única alternativa correta se T for infinito (opção perpétua), pois devido ao efeito de desconto do fluxo de caixa (e considerando que o valor do ativo básico é finito), se tem $F_i(\infty) = L_i(\infty) = 0$. Mas mesmo no caso finito, essa alternativa tem uma lógica, pois continuar esperando na expiração poderia significar não perfurar e devolver o bloco ao governo, mesmo que não seja ótimo. A desvantagem é que, nesse caso, o valor do líder na expiração pode ser maior que o valor do seguidor (invertendo a principal característica do jogo guerra de atrito) se na expiração o valor do líder for estritamente positivo ($VME > 0$).

A segunda alternativa de condição terminal para o seguidor é mais comum, manter a vantagem do segundo movimento, i. é, $F(T) > L(T)$. Nesse caso, a característica do jogo é que é *possível* na expiração capturar o prêmio. Isso é

²⁸⁴ Pode ocorrer que a revelação de informação esperada não torne a opção do seguidor “deep-in-the-money” para nenhum cenário, por isso o sinal de igual pode ocorrer. No contexto de opções finitas, no entanto, o valor da opção (*ceteris paribus*) *sempre* declina com o tempo.

verdade no caso dos jogos de guerra de atrito de contratos, mencionados antes, pois se um jogador ceder em $t = T$, automaticamente o outro jogador ganha o prêmio $F - L$, que nesses casos são assumidos estritamente positivos. No contexto da tese (exploração de petróleo), considere a alternativa similar:

$$F(T) \geq L(T) \quad (253)$$

Essa condição terminal teria a vantagem de não ser descontínua em $t = T$. A Figura 56 mostra como poderia ser os valores do líder e do seguidor na expiração, consistente com a condição da eq. (253), e em função (assuma linear) de uma variável de estado de interesse, no caso o preço do petróleo.

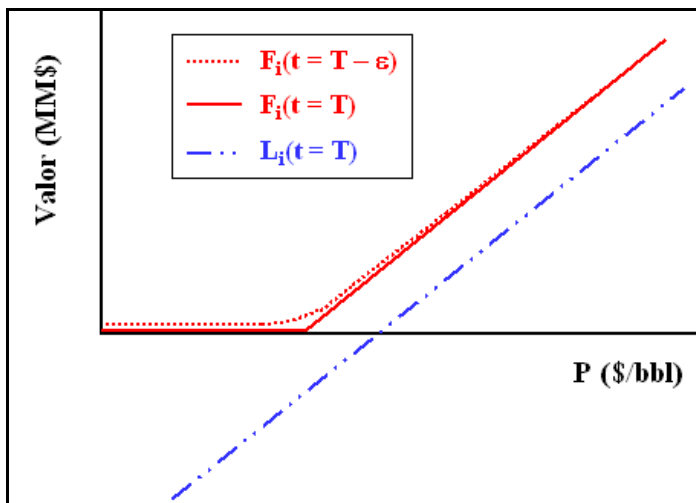


Figura 56 – Alternativa de Condição Terminal na Guerra de Atrito

Aqui se assume que o valor F tem a característica de opção (por isso não pode ser negativa), pois, pela natureza do seguidor, ele sempre usa a informação de forma ótima para decidir se perfura ou não o seu próprio prospecto. Note que o valor de F um pouco antes (em $t = T - \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um valor infinitesimal) da expiração, é próximo e se aproxima suavemente (continuamente) de $F(T)$. O valor do líder, que representa o valor do exercício da opção sem a informação extra, pode ser negativo para baixos valores da variável de estado (P). Na Figura 56, para elevados preços do petróleo, parece que as retas dos valores do seguidor e do líder são paralelas, mas nos problemas práticos (como será visto no cap.5) elas podem se encontrar suavemente para um valor alto de P . Por isso a eq. (253) admite a igualdade, ao contrário de outros exemplos mais simples da literatura. A razão é que para elevadíssimos preços do petróleo a revelação de informação torna-se irrelevante economicamente, pois a opção seria exercida em qualquer

cenário revelado (mesmo com más notícias). Mas se esses altos valores forem excluídos do *jogo*, $F > L$ em $t = T$, e o equilíbrio será único (teorema de Zermelo).

A desvantagem da segunda alternativa (eq. 253) é de interpretação, já que mesmo considerando a perfuração como instantânea, pela natureza *seqüencial* – exercício da opção pelo líder, seguido de anúncio público do resultado, seguido de exercício ou não do informado seguidor – parece mais lógico o seguidor só poder usar essa informação na data $T + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um valor infinitesimal. Mas nesse caso a opção já teria expirado. Isso leva à terceira alternativa a seguir.

A terceira alternativa de condição terminal para o seguidor ao contrário da primeira e em concordância com a segunda alternativa, caracteriza o valor do seguidor como uma *opção*, de forma que F nunca é menor do que L , mesmo na expiração. Mas difere da segunda alternativa por não poder usar a revelação de informação se a mesma ocorrer apenas na expiração. A terceira alternativa de condição terminal ($t = T$) para o seguidor é dada por:

$$F_i(T) = \text{Max}\{L_i(T), 0\} \quad (254)$$

Assim, mesmo considerando a perfuração como instantânea, o seguidor só poderia usar essa informação na data $T + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um valor infinitesimal mas suficientemente positivo para a opção já ter expirado e assim não poderia usar a informação. Nesse caso, olhando para a Figura 56, haveria uma descontinuidade na expiração, pois a curva tracejada de $F(t = T - \varepsilon)$ despencaria para o valor do líder $L(T)$ na região em que $L(T) > 0$. Essa descontinuidade é a maior desvantagem dessa alternativa, pois não haveria uma “última data” em que o seguidor poderia usar essa informação.

As três alternativas de condição terminal são possíveis, mas as mais adequadas no problema em análise parecem ser a segunda e a terceira. O mais importante é deixar claro a condição usada e a conseqüente premissa assumida.

Por conveniência de cálculo, será assumido que a perfuração é instantânea. Poderia-se imaginar que a expiração legal na verdade ocorra em $t = T' = T + t_R$, onde t_R é o *tempo de revelação* da informação (ou tempo de aprendizado), i.é, o tempo de perfuração que é da ordem de três meses. Mas isso em geral não altera o jogo do ponto de vista conceitual. Esse ponto será novamente abordado no cap.5.

As condições dadas pelas eqs. (248) a (251) e a (253) ou (254), diferem um pouco daquelas apresentadas por Fudenberg & Tirole (1991, p.121-122),

especialmente devido ao jogo de interesse da tese ser finito. Fudenberg & Tirole tinham em mente jogos *infinitos*. Assim, as condições deles foram inspiradas pelas aplicações que eles desenvolveram (ex.: Fudenberg & Tirole, 1986) para o abandono de firmas em duopólios e/ou guerra de preços.

Como é padrão em jogos de parada ótima finitos, o jogo é resolvido de trás para frente (“backwards”), resolvendo primeiro o subjogo em $t = T$ e depois trazendo os resultados (EN e valores resultantes) nos subjogos precedentes que ocorrem em $t < T$ e assim determinar o ENPS, pois por definição o ENPS induz EN em todos os subjogos que começam em qualquer instante t . Nos jogos de OR, esses equilíbrios são equilíbrios perfeitos de Markov, no sentido de ser condicional à variável de estado que segue um processo estocástico (aqui será o preço do petróleo). Nesse caso, os tempos de parada deverão ser funções da variável estocástica.

4.1.3. Jogos de Barganha

Jogo de barganha é um dos ramos da teoria dos jogos de maior interesse prático, se não for o maior²⁸⁵. No cap. 2, ao comentar o exemplo da Figura 3, observou-se que era possível desenhar contratos de parceria para obter ganhos baseados na revelação de informação de um prospecto em outro. Esses contratos de parceria são exemplos de resultados de jogos de barganha. A análise dos equilíbrios desses jogos de barganha e os possíveis métodos de solução, são de grande interesse para a indústria de petróleo.

A teoria dos jogos de barganha é dividida em três ramificações: (a) jogos de barganha não-cooperativos; (b) jogos de barganha cooperativos; e (c) jogos de barganha evolucionários. A teoria não-cooperativa é baseada principalmente no famoso modelo de ofertas alternadas de Rubinstein (1982), que chega a um único ENPS que nem sempre parece intuitivo ou “justo”. A teoria cooperativa mais popular é, de longe, a chamada solução de Nash (1950, 1953), que apresenta resultados mais intuitivos. A teoria evolucionária é mais recente, ver Napel (2002) para detalhes, e baseada na teoria dos jogos evolucionários (ver item 4.1.5.3). Enquanto a teoria não-cooperativa de barganha especifica os detalhes do *processo* de barganha (exs.: ofertas são alternadas, o jogador i faz a primeira oferta, o

²⁸⁵ Esse item é baseado principalmente em Dias & Teixeira (2004).

tempo entre cada oferta, se é jogo infinito ou não, etc.), a solução cooperativa é mais simples e geral, pois independe do processo *específico* em que se dá a barganha. Embora a especificação do processo de barganha possa provar a existência do ENPS, ele pode chegar a resultados menos intuitivos, por ex., que o primeiro jogador a fazer a oferta tem uma vantagem decisiva para obter todo ou a maior parte do prêmio do jogo de barganha.

A ênfase maior dessa tese será em jogos de barganha cooperativos, mas existe uma ligação estreita da teoria dos jogos de barganha não-cooperativos (Rubinstein) com a solução cooperativa de Nash: no modelo de ofertas alternadas, se for permitido um pequeno risco de desistência da negociação (“breakdown”) depois da rejeição de qualquer oferta, a solução de barganha não-cooperativa (ENPS) converge para a solução cooperativa de Nash quando a probabilidade de desistência vai para zero (ver Osborne & Rubinstein, 1994, seção 15.4). Isso será mais bem discutido e usado depois para obter um ENPS.

Para motivar e introduzir alguns conceitos e notação, considere o exemplo do cap. 2, em que foi usada a eq. (3) para calcular o valor de um prospecto. No exemplo o VME foi de – 1,5 milhões. Nesse exemplo existe um outro prospecto, vizinho e no mesmo play geológico, que tem as mesmas características e o mesmo VME negativo do primeiro. No entanto, a perfuração de um dos prospectos tem um benefício adicional, mais sutil, que é revelar informação para o outro prospecto (Figura 3). Assim, a união dos dois prospectos é bem mais valiosa que a soma dos VMEs individuais. Agora assuma que cada um desses dois prospectos iguais é de uma companhia de petróleo diferente, Companhia i e Companhia j. Na ótica da guerra de atrito, i. é, sem cooperação, nenhuma das duas companhias iria perfurar o seu poço (pois o VME < 0) e assim o jogo terminaria com ambas as firmas obtendo o valor zero com a estratégia “ótima” da guerra de atrito. Note que não haveria incentivo em desviar de forma unilateral dessa estratégia em qualquer subjogo (qualquer t) desde que o exercício tenha VME negativo, e assim esse equilíbrio seria ENPS, mas resultando em valor zero para ambos os jogadores.

Agora considere a possibilidade de um acordo de cooperação entre as duas companhias de petróleo, que reconhecem o benefício da revelação de informação e irão procurar dividir esse benefício num processo de barganha. Seja U a união dos dois ativos. Seja U_i e U_j os valores dos jogadores i e j resultantes de um jogo

de barganha cooperativo. Seja w_i e w_j , com $w_i + w_j = 1$, as participações (“working interest”) das firmas i e j na união de ativos U , ou seja:

$$U_i = w_i U \quad (255)$$

$$U_j = w_j U \quad (256)$$

Para explorar a revelação de informação, o acordo de cooperação prevê que um poço será perfurado imediatamente e o outro será perfurado ou não a depender da informação revelada pela primeira perfuração. Assim, o valor da firma i é:

$$U_i = w_i \{VME_1 + [FC_1 \cdot \text{Max}(0, VME_2^+)] + [(1 - FC_1) \cdot \text{Max}(0, VME_2^-)]\} \quad (257)$$

O valor da firma j é similar (com w_j). Imagine o seguinte contrato de parceria: devido à simetria dos prospectos, as firmas dividem seus prospectos em 50% de participação em cada prospecto por cada firma. Ou seja, $w_i = w_j = 50\%$. Quais os valores das firmas nesse caso? Na discussão da Figura 3 foi visto que o valor da união de ativos, com perfuração de um poço e o uso da revelação de informação, era $U = + 3,75$ MMS. Dessa forma, o acordo simétrico de barganha resulta nos valores $U_i = U_j = + 1,875$ MM\$, um resultado bem melhor do que o do jogo guerra de atrito. Isso significa que existe um forte incentivo em muitos casos para haver uma troca de jogos (da guerra de atrito para o jogo de barganha). Assim, a cooperação é melhor resposta simultânea, i. é, não há incentivo unilateral para desviar a qualquer tempo t , e assim também pode ser vista como ENPS. Isso será desenvolvido com mais detalhes no cap. 5, mas se continuará nesse exemplo para desenvolver a notação de jogos cooperativos de barganha.

Nesse exemplo, se as firmas não conseguissem chegar a um acordo, se teria um *desacordo* (“disagreement”) ou desentendimento e as firmas voltariam a se comportar de forma não-cooperativa. Essa alternativa não-cooperativa – chamada de ponto de desacordo (“*disagreement point*”, d) ou ponto de *status quo*, nesse exemplo teria valor igual a zero ($d_i = d_j = 0$), pois em caso de desacordo até a data T , as firmas não iriam perfurar nenhum poço e os prospectos seriam devolvidos para o governo.

No exemplo, dada a simetria, pareceu natural a troca de 50% de participação de cada prospecto para cada firma, como sendo um equilíbrio natural desse jogo cooperativo. Entretanto, existem outras estratégias cooperativas de equilíbrio. Na verdade, existe um contínuo de estratégias disponíveis que são EN, a maioria deles com participações assimétricas. Por ex., se o acordo é tal que a firma j tem uma participação de apenas $w_j = 40\%$ (e $w_i = 60\%$), os valores dos jogadores com

esses contratos seriam $U_i = 2,25$ MM\$ e $U_j = 1,5$ MM\$. Mesmo sendo menor que o valor do outro jogador, U_j é positivo (melhor que $d_j = 0$), de forma que não existe incentivo unilateral de desvio (i. é, é EN). Na prática esse não é o mais provável resultado em equilíbrio, mas é também EN. Entretanto, a teoria de barganha cooperativa usando a *solução* de Nash²⁸⁶, irá recomendar a divisão de 50%-50% como a única solução do jogo nesse exemplo.

Assuma que a variável de barganha no contrato em negociação é a participação $w_i = 1 - w_j$. O conjunto de pares possíveis de participação $\{w_i, w_j\}$, com $w_j = 1 - w_i$, mais o ponto de desacordo $d = (d_i, d_j)$, formam o (total) conjunto factível (“*feasible set*”), denotado por \mathcal{S} , elemento básico do jogo de barganha. Para qualquer $w_i \in [0, 1]$, o contrato $\{w_i, w_j\}$ é simultaneamente melhor resposta, de forma que o (não-cooperativo) conceito de equilíbrio de Nash não pode ajudar a selecionar um único contrato de equilíbrio. Entretanto, os conceitos ou axiomas da teoria de barganha podem ajudar a apontar um único resultado.

Seja um jogo cooperativo de barganha definido pelo conjunto factível e pelo ponto de desacordo, o par (\mathcal{S}, d) , sendo \mathcal{S} um conjunto convexo, limitado, fechado e com pelo menos um ponto dominando estritamente o ponto $d \in \mathcal{S}$. Defina a *solução* do jogo como uma regra que dá as proporções da divisão do prêmio ou excedente (“surplus”). Os três critérios mais aceitos para selecionar uma solução cooperativa são²⁸⁷: (a) a solução de Nash (1950), que recomenda o ponto de \mathcal{S} no qual o produto dos ganhos em relação a d é máximo; (b) a solução de Kalai & Smorodinsky (1975), que sugere o ponto de \mathcal{S} no qual os ganhos em relação a d são proporcionais aos máximos valores possíveis dentro do subconjunto de pontos factíveis dominando d ; e (c) a solução igualitária, a qual recomenda a solução que iguale os ganhos dos jogadores em relação a d . No exemplo *simétrico* simples apresentado, a solução natural $w_i = w_j = 50\%$ coincide para todos os três critérios. Mas para o caso de valores assimétricos (ex., $d_i = 0$ e $d_j = + 1$ MM\$), essa coincidência não se verifica.

A solução cooperativa de Nash é uma abordagem *axiomática* baseada *principalmente* em três princípios gerais: (a) *invariância de escala*, i.é, a solução

²⁸⁶ Não confundir “solução cooperativa de Nash” com “equilíbrio de Nash”.

²⁸⁷ Ver Thomson (1994) para uma avançada, mas concisa discussão sobre essas e outras soluções de barganha cooperativa. Para uma ótima introdução à solução cooperativa de Nash num nível elementar, ver Dixit & Skeath (1999, ch.16).

não muda em caso de transformações lineares na escala de valores (“payoff”); (b) *eficiência do resultado*, i.é, os jogadores obtêm somados não menos que *todo* o prêmio disponível (nenhum ganho mútuo é deixado inexplorado); e (c) *independência de contração*, i.é, a solução é invariante à remoção de soluções alternativas factíveis, mas irrelevantes (soluções não adotadas).

Nash (1950) provou que a sua solução é a única que satisfaz os axiomas de invariância de escala, de ser Pareto-ótimo (um critério de eficiência mais forte), de independência de contração, e de *simetria*²⁸⁸. Entretanto, a formulação da solução de Nash sem a premissa de simetria tornou-se mais comum em *aplicações* econômicas (Dixit & Skeath, 1999, p.528), mesmo gerando múltiplas soluções (um grau de liberdade, ou *flexibilidade*, para considerar alguma outra variável na seleção do problema e/ou a assimetria se os jogadores terem diferentes *poderes de barganha*)²⁸⁹. No cap. 5 será usada a solução de Nash *com* o axioma de simetria, a fim de obter uma solução única no jogo de OR.

A Figura 57 ilustra a solução de Nash para o jogo de barganha cooperativo.

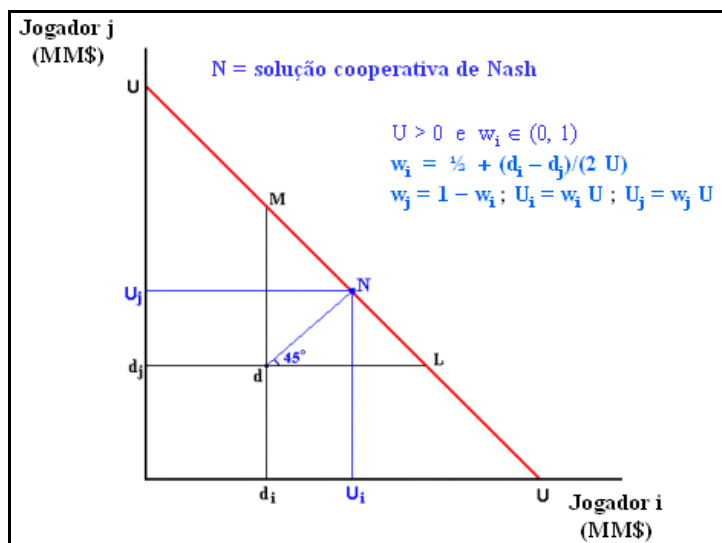


Figura 57 – Solução de Nash para o Jogo de Barganha Cooperativo

Na Figura 57, a linha (vermelha) que liga os pontos $(U, 0)$ e $(0, U)$ representa o conjunto factível de *acordos* (todas as combinações convexas dividindo U)²⁹⁰, enquanto que o ponto de desacordo d com coordenadas (d_i, d_j) representa os valores das firmas em caso de não fechar o acordo (ou desacordo,

²⁸⁸ O problema de barganha (S, d) é simétrico se a solução $f_i(S, d)$ com um jogador é igual à solução com o outro jogador $f_j(S, d)$.

²⁸⁹ Uma visão análoga foi usada na tese para a *estrutura de informação flexível* (ver cap.3).

²⁹⁰ Esse conjunto não necessariamente é linear, embora seja bem mais comum.

um ponto chave que será discutido abaixo). Note que somente o segmento de reta L-M é de interesse (para um acordo), pois de outro modo as firmas ficariam melhor com os valores dados pelo ponto de desacordo d. O ponto N que está nesse segmento, é a solução única da barganha cooperativa de Nash. O axioma de simetria significa simplesmente que o segmento d-N tem inclinação de 45°, enquanto que sem o axioma de simetria, se poderia escolher qualquer ponto do segmento L-M. É fácil deduzir as seguintes equações que, junto com as eqs. (255) e (256), caracterizam a solução de barganha de Nash:

$$w_i = \frac{1}{2} + (d_i - d_j)/(2U), \quad U > 0 \text{ e } w_i \in (0, 1) \quad (258)$$

$$w_j = \frac{1}{2} - (d_i - d_j)/(2U), \quad U > 0 \text{ e } w_j \in (0, 1) \quad (259)$$

Formalmente, além de ser a única a atender aos 4 axiomas mencionados, a solução de Nash $N(S, d)$ é o resultado do seguinte problema de maximização:

$$N(S, d) = \operatorname{argmax}\{(U_i - d_i)(U_j - d_j) \mid (U_i, U_j) \in S, U_i \geq d_i, U_j \geq d_j\} \quad (260)$$

Onde os argumentos que maximizam a expressão da eq. (260) são as variáveis de barganha w_i e w_j (participações em U dos jogadores i e j).

A ligação entre as teorias de barganha cooperativa e não-cooperativa – chamada de *programa de Nash* (“Nash program”), tem sido discutida desde Nash (1953) com o seu conceito de *jogo de ameaça* (“threat game”) e o seu conceito de *jogo da exigência* (“demand game”) ²⁹¹. Pesquisas mais recentes têm mostrado que, para uma ampla classe de casos de interesse prático, o ENPS (único em alguns casos) do jogo não-cooperativo de barganha converge para a solução cooperativa de Nash. Isso aumenta a relevância da solução de Nash para o jogo de barganha. Essa notável ligação entre as teorias não-cooperativa e cooperativa de barganha foi descoberta por Binmore (1987), que no jogo de ofertas alternadas de Rubinstein (1982) fez o intervalo de tempo entre as ofertas tender a zero, obtendo a solução de Nash como limite. Binmore & Rubinstein & Wolinsky (1986) consideraram o risco de desacordo (“breakdown”), obtendo também a solução de Nash como o limite do ENPS quando esse risco tende a zero. Rubinstein & Safra

²⁹¹ No jogo de ameaça, cada jogador assume uma ameaça ao outro jogador se o oponente não aceitar sua proposta e *depois* jogam um jogo não-cooperativo de exigência. O equilíbrio desse jogo da exigência coincide com a solução de Nash quando as exigências são ótimas.

& Thomson (1992) estenderam esse resultado para o caso dos valores dos jogadores tendo preferências mais gerais (utilidade não esperada), em que também o ENPS converge para a solução de Nash.

Além dos próprios axiomas, uma das questões mais discutidas na literatura de barganha cooperativa – e muito importante também para justificar o ENPS – é o ponto de desacordo d . Existem pelo menos dois caminhos trilhados na literatura para estabelecer esse ponto, ambos ligados a jogos não-cooperativos, já que algum jogo não-cooperativo deve ser jogado em caso de falhar o acordo (desacordo). Um caminho usa a idéia inicial de Nash sobre a escolha de ameaças (“threat”) *antes* da negociação da divisão de U . O outro caminho, que será adotado nessa tese, inclusive no cap.5, é que os jogadores não escolhem ou anunciam ameaças²⁹². Eles simplesmente procuram fechar o acordo sem fazer ameaças, embora saibam que, se houver um indesejável e inesperado desacordo irreversível, eles irão jogar um jogo não-cooperativo a partir do instante t_d , quando ocorreu o desacordo. O desacordo é indesejado, pois desaparece o ganho potencial (Pareto eficiente) que só existe em caso de acordo. Por isso ele é improvável (desviar para estratégias que não ganham o prêmio), embora o risco de desacordo possa ser arbitrariamente pequeno (com probabilidade positiva ϵ). Se o jogo não-cooperativo inesperado ocorrer e se ele tiver um único equilíbrio (EN), então esse equilíbrio determinará o ponto de desacordo d (Binmore, 1992, p.262; Harsanyi, 1977, p.168; Binmore, 1998, p.65). No contexto mais dinâmico dessa tese, se irá procurar o ENPS do subjogo que começa em t_d para determinar o ponto d .

Note que o ponto d não é uma *opção externa* (Binmore, 1998, p.80), i.é, uma alternativa àquela barganha, e sim o resultado inesperado de uma falha de negociação. Uma opção externa seria, por ex., se existisse um terceiro jogador (outra companhia de petróleo) que fizesse uma oferta externa para um dos jogadores (ou para ambos), por também ter um prospecto correlacionado em um terceiro bloco. Essa oferta geraria para um ou ambos os jogadores a alternativa b_i e/ou b_j , em geral com valores diferentes de d_i e d_j , que os jogadores poderiam desviar (quebrar a barganha) se fossem melhores que os valores que estiverem na mesa de

²⁹² Essa distinção de caminhos aparece em Binmore (1992, p.261-263) e antes em Harsanyi (1977, p.167-169).

negociação entre os dois primeiros jogadores. Assim, não se deve confundir opção externa com ponto de desacordo, i.é:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \neq \mathbf{d} = (\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j) \quad (261)$$

Já o caminho do jogo de ameaças é menos claro e geralmente não leva ao ENPS. Essas ameaças anunciadas podem ter efeitos no jogo da ameaça, sendo ou não críveis. Mas se a ameaça não for crível ela soa como “blefe” e não é considerada que será levada a cabo pelo oponente. Uma ameaça crível é aquela que todos acreditam que poderá ser levada a cabo por ser a ação mais racional, dada as circunstâncias. A discussão clássica sobre ameaças críveis e não críveis é devido a Schelling (1956 e 1960). Podem-se trabalhar as circunstâncias para tornar uma ameaça mais crível. Por ex., a tática do conquistador espanhol Cortés, que queimava os próprios navios para emitir um sinal de não ter alternativa a não ser lutar. Esse sinal indicava um compromisso de não recuar ou não desistir, que servia tanto aos próprios soldados, como principalmente ao inimigo, que assim via a ameaça como crível (ver Dixit & Nalebuff, 1991, p.152-155).

4.1.4.

Outros Jogos de Interesse

4.1.4.1.

Jogos de Informação Incompleta

Em muitos jogos que ocorrem na economia (e na vida), é mais realista considerar que existe uma informação incompleta sobre o outro jogador. No exemplo exploratório, um jogador pode identificar pela sísmica se a sua estrutura ou a do vizinho é maior ou não, mas a firma não sabe qual a probabilidade de sucesso que foi estimada pelos geólogos e geofísicos da outra companhia de petróleo, em geral não sabem a taxa de desconto que a outra usou, além de outros parâmetros usados para estabelecer o VME do prospecto. Assim, existe uma informação incompleta sobre o valor do jogo para o outro jogador.

Nos jogos de informação incompleta, cada firma só recebe informações parciais sobre os valores do jogo, representadas por distribuições de probabilidades a priori sobre os possíveis cenários. Os chamados jogos de sinalização são exemplos de jogos de informação incompleta. Nesses casos geralmente existe uma parte informada e outra parte não-informada, i. é, a informação é assimétrica. O problema de assimetria de informação, especialmente

no mercado, gera problemas de eficiência econômica. Esse tema tem sido muito analisado por economistas e já rendeu 5 prêmios Nobel de economia. Em 1996, foram laureados Mirrless (taxação de renda ótima dado que o contribuinte tem informação privada)²⁹³ e Vickrey (análise e desenho de leilões). Em 2001 foram laureados Akerlof (seleção adversa, o problema do mercado de “limões”), Spence (jogos de sinalização) e Stiglitz (menu de alternativas ou “screening”). Spence e Stiglitz apontaram soluções (ou antídotos) para reduzir o problema de ineficiência do mercado (seleção adversa) devido à assimetria de informações. Todos esses problemas podem ser (e vários foram originalmente) solucionados com métodos de jogos de informação incompleta.

O método geral para resolver os jogos de informação incompleta é o *método Bayesiano* desenvolvido por Harsanyi (1967-68). Nele, o jogo original com informação incompleta torna-se um jogo equivalente de Bayes com informação completa, embora imperfeita. Os valores dos jogadores (ou preferências) são associados à realização de v.a. É assumido, como premissa, que a distribuição conjunta dos valores dos jogadores são de *conhecimento comum*. Conhecer essa distribuição conjunta geralmente implica conhecer as distribuições a priori e a estrutura de dependência (ver cap.3).

No jogo reinterpretado como de informação completa, mas imperfeita, a natureza faz o primeiro movimento escolhendo a realização da v.a. sobre o valor ou “tipo” do (ou de cada) jogador. Em termos formais, cada jogador i tem uma função valor $V_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$, onde $\theta_i \in \Theta_i$ é uma v.a. escolhida pela natureza que só é observada pelo jogador i . A distribuição multivariada (conjunta) dos J jogadores é dada por $G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J)$, assumida conhecida por todos os J jogadores. Uma estratégia pura para o jogador i é uma regra de decisão ou função $s_i(\theta_i)$ que dá a escolha estratégica para cada realização do seu tipo θ_i . O conjunto de todas essas funções é o conjunto de estratégias puras \mathcal{S}_i do jogo Bayesiano. O valor esperado do jogador i é dado por:

$$\tilde{V}_i(s_1(\cdot), s_2(\cdot), \dots, s_J(\cdot)) = E[V_i(s_1(\theta_1), s_2(\theta_2), \dots, s_J(\theta_J)) | \theta_i] \quad (262)$$

²⁹³ Mirrless introduziu conceitos e métodos a partir de 1971 que fazem parte do chamado “princípio da revelação”, que permite restringir a busca de mecanismos ótimos apenas àqueles que revelem diretamente a verdade (i. é, seja ótimo para a parte informada revelar toda a verdade).

Harsanyi usa um novo conceito de equilíbrio, o equilíbrio Bayesiano de Nash (EBN). O EBN para estratégias puras é definido de modo similar ao EN, mas para valores esperados condicionais (usa a eq. 262). O perfil de estratégias puras $s = (s_1, s_2, \dots, s_J)$ é um equilíbrio Bayesiano de Nash (EBN) se, para *todo* jogador $i = 1, 2, \dots, J$, vale a desigualdade:

$$\tilde{V}_i(s_i, s_{-i}) \geq \tilde{V}_i(s_i', s_{-i}), \text{ para qualquer } s_i' \in \mathcal{S}_i \quad (263)$$

Num EBN em estratégias puras, cada jogador está jogando a melhor resposta para a distribuição condicional dos valores das estratégias dos oponentes, para cada tipo que esse jogador pode assumir. Alternativamente, cada tipo de jogador pode ser pensado como um jogador diferente que maximiza o seu valor, dada a distribuição de probabilidade condicional sobre as escolhas estratégicas dos oponentes (Mas-Colell & Whinston & Green, 1995, p.256).

O EBN tem muitas conexões com o EN em estratégias mistas. Quase sempre o EBN em estratégias puras do jogo Bayesiano é equivalente ao EN em estratégias mistas do jogo original de informação completa (Gibbons, 1992, p.152-154). Essas conexões são feitas através dos chamados *teoremas de purificação* de Harsanyi (ver Mas-Colell & Whinston & Green, 1995, p.257).

Além disso, o *princípio de revelação* mencionado no cap. 3 tem uma versão no contexto de jogos Bayesianos (devido a Myerson) que diz que qualquer EBN de qualquer jogo Bayesiano pode ser representado por um mecanismo direto com incentivo-compatível, em que é ótimo revelar o seu tipo em jogos desenhados com esse mecanismo (ver Gibbons, 1992, p.164-165).

Nos jogos dinâmicos, o conceito de equilíbrio Bayesiano perfeito (EBP) é similar ao ENPS no sentido que um perfil de estratégias EBP deve induzir EBN em todos os subjogos (ou jogos de continuação) dadas as crenças (probabilidades) posteriores dos jogadores. Ou seja, aplica-se o teorema de Bayes para atualizar a distribuição de probabilidade conjunta, usando as informações (os sinais) que foram realizados até aquele estágio do jogo. Uma boa introdução a esses jogos, especialmente nas aplicações de jogos de sinalização, é encontrada em Gibbons (1992, cap.4). Existem diversas aplicações em finanças, como em política de dividendos e de emissão de dívidas (estrutura de capital da firma). Um exemplo clássico de assimetria de informação entre firmas emitindo dívidas ou ações e o mercado, é o artigo de Myers & Majluf (1984), com a teoria de “pecking-order”.

Mas-Colell & Whinston & Green (1995, cap.9) usa o adjetivo “fraco” no EBP para caracterizar que o requerimento de consistência (atualização Bayesiana) só é exigido no *caminho de equilíbrio* e não em todos os possíveis caminhos da árvore de jogos. Ou seja, nos conjuntos de informação com probabilidades iguais a zero (de serem atingidos), nada é exigido. Mas existem casos em que um EBP fraco não é ENPS, o que gera a necessidade de fazer exigências adicionais para os outros conjuntos de informação.

Um exemplo de jogo dinâmico de informação incompleta é o *jogo de metas de inflação* que o Banco Central joga com os agentes do mercado. É um exemplo também de *jogo de sinalização* devido à assimetria de informação, com uma parte informada (BC) e outra não-informada (agentes do mercado). Esses agentes têm incerteza sobre o “tipo” do jogador “Banco Central”, por ex., se ele é do tipo “duro” no combate à inflação (eventualmente sinalizando com aumento de juros) ou do tipo “mole” no combate à inflação (que cede a pressões políticas e não aumenta os juros quando necessário). O Banco Central sinaliza o seu tipo com a sua política monetária²⁹⁴.

A premissa de conhecimento comum da distribuição conjunta dos valores dos jogadores nos jogos Bayesianos parece ser muito forte, mas não é bem assim. No exemplo exploratório, existem diversas fontes de informação que ajudam a gerar as distribuições a priori. Por ex., deve-se considerar que todas as companhias tiveram acesso aos registros sísmicos, inclusive do prospecto vizinho. Além disso, é razoável assumir que a probabilidade de uma companhia perfurar ao longo do termo da concessão segue uma curva U (ver Dias, 1997), porque esse é o comportamento mais comum indicado por estudos econométricos, conforme apontado por Hendricks & Porter (1996). Uma curva U significa que: (a) no início do termo da concessão muitos blocos são perfurados (prospectos muito atrativos e menos estratégicos); (b) no meio do prazo da concessão há uma redução na quantidade de poços pioneiros sendo perfurados; e (c) no final do prazo de concessão ocorre um aumento na perfuração desses poços. Hendricks & Porter

²⁹⁴ Isso foi modelado por Vickers (1986) em dois períodos: a natureza escolhe o tipo de autoridade monetária (BC), que pode privilegiar a meta de inflação ou o crescimento; os agentes formam a sua expectativa π^c_1 sobre a inflação para o primeiro período; o BC observa π^c_1 e escolhe a inflação do 1º período π_1 (sinal), através da taxa de juros; os agentes observam π_1 mas não o verdadeiro tipo do BC; os agentes formam uma crença π^c_2 para a inflação do 2º período e tomam decisões de investimento, estoque e preços, o BC observa π^c_2 e escolhe a inflação do 2º período.

(1996) também indica que, pelo menos no início da concessão, quanto maior o valor do bônus pago pelo bloco (que é informação pública), maior a probabilidade dessa companhia exercer logo a sua opção de perfuração no bloco. Logo, existem vários dados que permitem modelar a distribuição a priori da outra companhia perfurar o seu bloco ao longo do prazo exploratório.

Os conceitos de EBN e EBP podem ser aplicados em praticamente todos os tipos de jogos (barganha, guerra de atrito, leilões, jogos de sinalização, etc.). Algumas referências adicionais serão feitas para o caso específico analisado no cap.5, para a guerra de atrito do jogo exploratório.

Assim, Harsanyi (1967/8) desenvolveu uma teoria geral para jogos de informação incompleta com foco na *incerteza sobre o tipo de um jogador*. Derivado do trabalho de Harsanyi, Wilson (1969) apresentou um modelo para o caso de incerteza sobre o valor do resultado (“payoff”) do jogo. Esse modelo foi aplicado ao caso de um leilão selado de primeiro-lance. Esse modelo – muito citado na literatura de leilões, é apresentado no próximo tópico devido à relevância teórica e prática em leilões de blocos de exploração de petróleo.

4.1.4.2. Jogos de Leilões

A teoria dos leilões (“auction theory”) é um dos mais importantes ramos da teoria dos jogos, especialmente devido a sua relevância prática. Muitos dos mercados mais importantes na economia podem ser vistos como mercado de leilões. Em exploração de petróleo, os direitos exploratórios sobre blocos são leiloados pelo governo, geralmente em *leilões selados de primeiro lance*, i. é, as companhias de petróleo entregam envelopes lacrados (selados), sendo que o maior lance ganha os direitos sobre o bloco e a companhia ganhadora paga o valor indicado no seu envelope (por isso é chamado de primeiro lance).

O desenho do leilão ótimo para um tipo de mercado e/ou a análise e o refinamento dos tipos de leilão existentes, são objetos da teoria dos leilões. A teoria dos leilões usa conceitos da teoria dos jogos, especialmente de jogos de informação incompleta sobre os valores que os jogadores (participantes do leilão) atribuem ao objeto (ou ativo) leiloadado.

Além de presença obrigatória nos textos de teoria dos jogos, existem muitos livros-texto inteiramente dedicados à teoria dos leilões, a maioria recente. Exs.:

Kagel & Levin (2002), Krishna (2002), Milgrom (2004) e Klemperer (2004). A análise de jogos de leilões como jogos de informação incompleta foi originado no trabalho pioneiro (fundamental para o seu Prêmio Nobel) de Vickrey (1961). Ele mostrou estratégias ótimas nesse jogo de informação incompleta antes de Harsanyi (1967-68) formular a teoria geral desses jogos.

Vickrey (1961) analisou o leilão *selado de segundo lance*, em que ganha o envelope lacrado com o maior lance, mas o ganhador só paga o valor do segundo maior lance (é similar, em termos de resultados, ao leilão *aberto inglês* de lances alternados). Cada tipo faz uma avaliação diferente do bem (ex.: um fã fanático pode estar disposto a dar um lance maior que um fã não-fanático por um objeto). Vickrey mostrou que dar um lance igual ao valor do bem para cada tipo é uma estratégia dominante e independe do tipo do jogador. Logo, todos os interessados irão revelar quanto realmente vale o bem para cada um (cada tipo irá dar um lance diferente) e ganha quem acreditar que o bem é mais valioso. Logo, esse leilão de segundo lance incentiva cada tipo a dizer a verdade sobre o valor do bem e ganha quem mais está interessado no bem. Com muitos jogadores (tipos) participando do leilão, no *limite* o leiloeiro conseguiria vender o bem pelo valor máximo, i. é, pelo valor do jogador com a maior avaliação²⁹⁵.

Em geral o número de jogadores não é tão grande e assim a pergunta natural é: qual o leilão ótimo, o de segundo lance ou o de primeiro lance? A resposta, um tanto surpreendente, é que em geral ambos dão a mesma receita esperada ao leiloeiro! Isso é referido como sendo a equivalência de receita entre os dois leilões e a demonstração usa o *princípio da revelação* para restringir a busca de soluções. Um exemplo é mostrado em Dutta (1999, cap.23), que analisa o caso extremo do leilão com apenas dois compradores. Cada jogador tem 50% de chances de ser de cada tipo e pode ocorrer que os dois sejam do mesmo tipo. No leilão de primeiro lance ele obtém um EBN (único) em que o tipo de menor valoração μ oferta o seu próprio valor e o tipo de maior valor θ joga uma estratégia mista atribuindo uma distribuição de probabilidades a todos os lances entre μ e $(\theta + \mu)/2$. Depois Dutta usa a solução de Vickrey para o leilão de segundo lance e chega à conclusão que ambos os leilões dão a mesma receita esperada ao leiloeiro.

²⁹⁵ Depois foi visto que esse equilíbrio é um EBN *separador* (separa os tipos de jogador).

Wilson (1977) mostra que os leilões competitivos satisfazem a *lei dos grandes números*, isto é, quando o número de participantes é grande (tende a infinito), o valor do lance vencedor tende ao valor correto do ativo leiloadado. Em outras palavras, o lucro do ganhador do leilão é zero em caso de leilão com *competição perfeita*. Esse resultado (lucro zero) é consistente com outros resultados da teoria econômica para o caso de competição perfeita²⁹⁶.

Na literatura profissional de petróleo, uma das mais citadas referências é o artigo clássico de Capen & Clapp & Campbell (1971), o primeiro²⁹⁷ a relatar o problema da *maldição do vencedor*²⁹⁸ (“winner’s course”) nesses leilões. Nele, é relatado que, de forma sistemática, as companhias de petróleo pagam mais do que valem esses direitos. A explicação é que as firmas, de forma ingênua, baseiam os seus lances nos seus valores esperados incondicionais do ativo em leilão, mas só ganham o leilão se suas avaliações individuais forem as mais altas dentre todos os jogadores. Dessa forma, embora em média as suas avaliações (e lances) não superestimem os valores dos ativos, as firmas só ganham quando as suas avaliações são as mais otimistas do leilão. Ou seja, ex-post (ou condicional a vencer) seus lances são geralmente maiores do que os valores dos ativos e se constata o prejuízo reportado por Capen & Clapp & Campbell (1971).

Milgrom (2004, p.166-181) analisa o caso de leilões de primeiro-preço dos direitos de exploração de blocos no Golfo do México, setor americano, com conclusões interessantes sobre o papel da informação no resultado do leilão. Ele se baseia nos artigos de Wilson (1969) e de Hendricks & Porter & Wilson (1994). Wilson (1967) também é um artigo clássico de informação assimétrica em leilões de primeiro lance de direitos exploratórios de petróleo, destacando o papel das firmas bem informadas (blocos vizinhos aos leiloados) das firmas menos informadas. Engelbrecht-Wiggans & Milgrom & Weber (1983) mostram que, em equilíbrio (agindo otimamente), o lucro esperado da firma informada é geralmente positivo, enquanto que os outros jogadores (os menos informados) tem lucro zero.

O modelo de Wilson (1969) é descrito sucintamente a seguir, que ele considera como um caso particular de Harsanyi (1967-68). Sejam dois jogadores 1

²⁹⁶ Dixit & Pindyck (1994, cap.8) mostra que, apesar do gatilho de investimento ser o mesmo no caso de monopólio e competição perfeita, o lucro esperado no primeiro caso é positivo (estritamente), enquanto que no segundo caso as firmas investem com lucro esperado igual a zero.

²⁹⁷ Ver Kagel & Levin (2002, p. 2).

²⁹⁸ Ou *curso* do vencedor, curso no sentido de ser inevitável, como o curso de um rio.

e 2 que disputam num leilão um objeto de valor X , sendo que X é desconhecido pelos jogadores, que conhecem apenas a (mesma) distribuição a priori do valor de X , de densidade $g(X)$. Antes do leilão, cada jogador i observa um sinal ou conjunto de informações S_i , que provê alguma informação a respeito de X . No caso de leilão de blocos para exploração de petróleo, cada jogador observa uma fonte comum de informação: os *registros sísmicos* vendidos tanto por firmas que lançam linhas sísmicas e/ou processam como pela agência de petróleo do governo. Wilson (1969) considera que os jogadores podem ter diferentes quantidades de informação sobre o valor de X . No caso de petróleo, uma firma pode ter maior conhecimento geológico da área do que a outra firma por já deter (e ter explorado) blocos vizinhos ao bloco em licitação, por ex. a Petrobras nos leilões da ANP.

Dessa forma, as empresas irão tomar a decisão (lance do leilão) usando a sua distribuição posterior, $g_i(X | S_i)$ para o caso do jogador i . Para o jogador i , existem infinitas possíveis distribuições posteriores que o seu oponente $-i$ pode ter em mente na hora do leilão. Se i deseja ganhar o leilão minimizando o “*dinheiro deixado sobre a mesa*” (diferença entre os dois primeiros lances do leilão), ele deve levar em conta essas infinitas distribuições posteriores do oponente.

Nesse leilão exploratório existem pelo menos dois tipos de firmas licitantes: as firmas “vizinhas” que detêm direitos (e informações geológicas) em blocos vizinhos aos blocos em licitação – chamadas *firmas bem informadas*, e as firmas “não-vizinhas” ou *mal informadas* sobre a potencialidade dos blocos em licitação. Logo, existe *assimetria de informação* entre os participantes do leilão.

Para resolver o jogo, Wilson (1969) assume que cada jogador i conhece, além da distribuição a priori, as densidades condicionais do oponente $f_{-i, i}(S_{-i} | S_i)$. Nesse caso de dois jogadores, embora o jogador 1 não conheça S_2 e nem o jogador 2 conheça S_1 , é assumido que ambos os jogadores conheçam as densidades condicionais dos oponentes. Essa é uma premissa crítica, já que é muito difícil conhecer tais densidades condicionais dos oponentes. O mercado (firmas) sabe quem são as firmas mais bem informadas (exs., Petrobras no Brasil; Shell em águas profundas do Golfo do México, etc.) e as firmas menos informadas. Mas daí a conhecer essas densidades condicionais dos seus competidores vai um grande passo. O que geralmente se sabe é fazer uma ordenação de graus de conhecimento entre as companhias de petróleo. Pelo menos nesses casos mais complexos, é muito mais *simples* usar uma métrica com uma escala de 0 a 1 (de ignorância total

para conhecimento total) para quantificar as diferenças de conhecimento S_i entre as firmas, do que estimar essas densidades condicionais ou mesmo funções verossimilhanças. Ou seja, também nesse contexto a métrica *redução esperada de variância* η_i^2 defendida no capítulo 3, parece interessante. Estimando η_i^2 para cada jogador, pode-se estimar as distribuições de revelações de cada jogador (ver cap. 3), pois a distribuição a priori é conhecida e comum. Assim, é possível resolver problemas complexos de equilíbrio dado que os jogadores estão maximizando os seus lances nos diversos cenários das suas distribuições de revelações. As vantagens são a simplicidade em ordenar as firmas em função do conhecimento do objeto leiloadado com uma simples escala percentual, a facilidade de estimação da razão de correlação com métodos populares como regressões e ANOVA, e a significância e simplicidade conceitual da métrica interpretada como redução esperada de variância, ver item 3.3. A extensão para leilões do uso da métrica proposta nessa tese é deixada como sugestão para futuros trabalhos.

4.1.5. Duopólios, Oligopólios e Outros Jogos

4.1.5.1. Duopólios e Jogos com Dois Jogadores

Na prática, a teoria dos jogos é mais relevante com dois ou poucos jogadores e por isso o caso de dois jogadores é muito estudado na literatura²⁹⁹. Será apresentado um exemplo de duopólio que irá ilustrar outros conceitos clássicos de equilíbrio ainda não vistos. Esse item será usado depois em exemplos de jogos de opções reais, especialmente no caso de *preempção* de uma firma num mercado com dois potenciais entrantes.

Sejam duas firmas que dividem um mercado geográfico de um produto específico. Considere uma (por enquanto determinística) curva de demanda inversa linear, dada pela equação.

$$p = 30 - Q_T \quad (264)$$

Onde p é o preço do produto, Q_T é a produção da indústria ($= q_1 + q_2$ para o caso de duopólio). Por simplicidade, assuma que o custo variável é zero – alternativamente, considere p como a *margem* de lucro operacional. Para entender

²⁹⁹ Esse item é baseado em Dias & Teixeira (2003).

os possíveis equilíbrios, serão plotadas as *curvas de reação* das duas firmas, i. é, as funções melhor resposta dos dois jogadores³⁰⁰ dada as estratégias das outras firmas, de forma que o lucro é maximizado para cada possível estratégia da outra firma. A Figura 58 mostra essas curvas, assim como as possibilidades de equilíbrios para essas duas firmas que competem em quantidade (estratégias são as escolhas de produções q_1 e q_2).

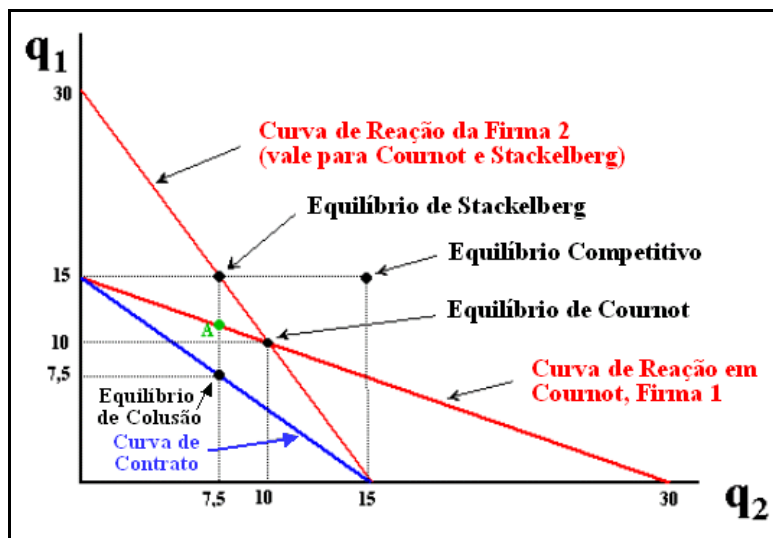


Figura 58 – Equilíbrios Clássicos em Duopólio

Os valores dos diversos tipos de equilíbrios em termos de lucros assim como os valores das respectivas margens unitárias, são apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 – Lucros e Margens dos Equilíbrios dos Duopólios

Equilíbrios	Lucros		Margem
	Firma 1	Firma 2	Unitária P
Colusão	112,5	112,5	15
Stackelberg	112,5	56,25	7,5 (*)
Cournot	100	100	10
Competitivo	0	0	0

(*) Margem depois da entrada do seguidor. Antes da entrada do seguidor a margem do líder é $p = 30 - 15 = 15 =$ margem da colusão.

A Figura 58 mostra as curva de reação (melhor resposta) das duas firmas, de forma que o ponto de cruzamento é a *melhor resposta simultânea* nesse jogo. Note que esse ponto é EN pois não existe incentivo para desvio unilateral. Esse EN é também o clássico equilíbrio de Cournot. O equilíbrio de Cournot ($q_1 = 10$ e $q_2 = 10$, no exemplo da Figura 58), também chamado de equilíbrio de *quantidade*,

³⁰⁰ No caso mais geral, as *correspondências* de melhor resposta no lugar de *funções*.

é o mais provável resultado tanto por ser EN, como por motivos que serão discutidos abaixo. Em essência, no equilíbrio de Nash-Cournot as firmas escolhem quantidades e um preço de equilíbrio faz a oferta e demanda se igualarem (“clears” o mercado), de acordo com uma curva inversa da demanda.

A Figura 58 também mostra o equilíbrio de Stackelberg. Nesse caso, existe um líder que entra primeiro no mercado ofertando uma quantidade que maximiza o lucro monopolista ($q_1 = 15$ e $q_2 = 0$, no exemplo). Quando a firma 2 entra como seguidora, ela observa a produção do líder e ajusta a sua produção de acordo com a sua curva de melhor resposta (reação). Logo, tanto a produção ($q_1 = 15$ e $q_2 = 7,5$) como o lucro (Tabela 14) são maiores para o líder, no caso o dobro do valor do seguidor. Isso é chamado de *vantagem do primeiro lance de Stackelberg*. Isso é possível se assumir um compromisso imutável do líder com aquela produção. Entretanto, se o jogo continua o equilíbrio de Stackelberg não é EN, pois existe um incentivo para o líder reduzir a sua produção para maximizar o lucro (ponto A na Figura 58). Depois disso, o seguidor irá reagir do mesmo jeito, até alcançar o equilíbrio de Nash-Cournot. Fudenberg & Tirole (1991, p.74-76) aponta que existe um problema de *consistência temporal* (“time consistency”) com o equilíbrio de Stackelberg, pois a quantidade do líder não é uma melhor resposta para a produção do seguidor. Assim, em jogos de momento ótimo com uma firma entrando primeiro, o resultado de Cournot é o equilíbrio mais provável.

A outra possibilidade é o equilíbrio de colusão ($q_1 = q_2 = 7,5$). Ele maximiza o lucro *conjunto* das firmas, com a curva do contrato, mostrada na Figura 58, dividindo o lucro máximo conjunto. Entretanto, sem um contrato formal ele não é EN porque existem incentivos para ambas as firmas desviarem. Além disso, contratos de colusão (associar-se para aumentar o lucro à custa do consumidor) são em geral ilegais ou antiéticos. No exemplo de jogos de OR (item 4.2), será visto que a *colusão tácita* (sem contrato formal) pode ser EN, dependendo das condições da indústria.

A Figura 58 também mostra o caso de equilíbrio competitivo perfeito. Nesse caso, ambas as firmas elevam a suas produções até elas alcançarem uma margem de lucro igual a zero. Para o caso de duas firmas, é fácil ver que isso não é EN.

Por que não uma competição de *preços*, o chamado equilíbrio de Bertrand? O artigo clássico de Kreps & Scheinkman (1983) faz a comparação entre a

competição de Bertrand x Cournot³⁰¹: “Com premissas brandas sobre a demanda, o único equilíbrio resultante é o de Cournot”. No jogo de dois estágios do artigo deles, as firmas escolhem capacidade (Cournot) no primeiro estágio e então seguem uma competição de preços de Bertrand. O resultado final é o resultado padrão de Cournot!

Será útil a discussão sobre a função inversa da demanda. Uma equação genérica é dada abaixo.

$$P = D(Q_T) \quad (265)$$

Onde P é o preço, $D(Q_T)$ é a função (inversa) demanda e Q_T é a produção total da indústria. Algumas possibilidades para a função demanda são:

$$\text{Demanda Linear: } P = a - b Q_T, \text{ com } a > 0, b > 0, a > b Q_T \quad (266)$$

$$\text{Demanda Iso-Elástica: } P = 1 / (Q_T + W) \quad (267)$$

$$\text{Demanda Exponencial: } P = a \cdot \exp[-\varepsilon Q_T] \quad (268)$$

A função *demanda linear* é a mais simples e a mais popular na literatura. A desvantagem é que quando Q_T aumenta até $Q_T = a/b$, o preço vai a zero (e fica negativo para Q_T maior). Logo, essa função pode ser representativa para uma indústria somente para um certo intervalo de valores de Q_T .

A *demanda iso-elástica* no seu formato mais simples é $P = 1 / Q_T$. No entanto, esse formato mais simples tem uma desvantagem. A receita total ($= P \cdot Q$) é constante e, portanto, na presença de um custo operacional variável, a indústria (monopólio ou oligopólio em colusão) irá achar ótimo reduzir a produção para um valor próximo de zero (com os preços indo para infinito) para poder reduzir o custo operacional sem reduzir a receita! Claro que isso causa problemas matemáticos. A solução adotada, eq. (267), foi analisada por Agliari & Puu (2002), usando uma curva iso-elástica *modificada* $P = 1 / (Q + W)$, de forma que é uma translação da hipérbole para uma nova posição, interceptando o eixo das ordenadas. Com essa modificação, o preço máximo é $1/W$ quando a produção tende a zero.

A função *demanda exponencial* tem as boas propriedades de preços não poderem ser zero e muito menos negativos, além de preços serem finitos quando Q_T tende a zero. Em adição, o parâmetro ε pode ser aqui interpretado como um

³⁰¹ Ver também Varian (1992, pp.301-302) para uma discussão sobre esse ponto.

tipo de *elasticidade da demanda*. Logo, essa função é uma boa alternativa de função demanda, flexível especialmente para uso em jogos estocásticos.

4.1.5.2. Oligopólios e Jogos de Quotas da OPEP

Quando o número de firmas cresce, os resultados em termos de produção da indústria, lucro esperado, preços, etc., em geral ficam numa situação intermediária entre os casos de duopólio e de competição perfeita. Esse pode ser visto como um caso limite de oligopólio com infinitas firmas. O caso de oligopólio será discutido com maior detalhe no item 4.2, quando se abordar conceitos de jogos de OR tais como o princípio da miopia ótima de Leahy e o modelo de oligopólio sob incerteza desenvolvido por Grenadier. Aqui será discutido brevemente um caso de interesse da indústria do petróleo, que é o cartel da OPEP.

A OPEP é um cartel de alguns países produtores de petróleo que tem tido variado grau de sucesso e fracasso nas suas tentativas de controlar a produção e os preços do petróleo. Pode-se caracterizar pelo menos dois jogos envolvendo a OPEP. O primeiro, externo, em que a OPEP atua como uma *coalizão de produtores* cujos oponentes são os produtores não-OPEP, que também disputam o mercado de suprimento de petróleo. Como cartel a OPEP busca a produção ótima principalmente para que os preços não caiam abaixo de um certo patamar. Já os produtores não-OPEP são *tomadores de preço* e produzem o máximo possível economicamente. Isso significa que um aumento de preços causado por uma redução da produção da OPEP, incentiva os produtores não-OPEP a produzirem o petróleo que antes não era comercial. Mas essa possibilidade de colocar produção extra é muito limitada no curto prazo, de forma que um acréscimo significativo de produção por parte dos produtores não-OPEP, em geral leva anos³⁰².

O segundo jogo envolvendo a OPEP é interno: a disputa por cotas de produção dentro da OPEP. Ou seja, dado um nível “ótimo” de produção da OPEP, quanto cada país membro irá produzir. Mesmo chegando a um acordo interno, existem incentivos para cada país aumentar a produção, desrespeitando as cotas acordadas (“cheating”). Isso porque, além do interesse individual de aumentar o

³⁰² Fora da OPEP, os novos campos de petróleo com volume significativo são campos marítimos e em águas cada vez mais profundas. Assim, demora anos para colocar óleo novo no mercado. Mesmo campos já descobertos, levam cerca de três anos para serem postos em produção. Pode-se levar 10 anos entre o leilão de novos blocos numa área e o início da produção nessa área.

lucro vendendo mais, é difícil no curto prazo identificar se alguém (e quem) está desrespeitando as cotas acordadas. Isso significa que a OPEP – como todo cartel – é instável devido aos interesses individuais não-cooperativos.

O livro texto de Dutta (1999, p.81-82 e cap.17) faz diversas análises da OPEP à luz da teoria dos jogos. Primeiro apresenta o jogo em termos de duopólio estático OPEP x não-OPEP (p.81-82) em que se joga uma competição de quantidade e, portanto, uma competição de Cournot. Esse duopólio é assimétrico pois Dutta colocou um custo de produção para a OPEP de US\$ 5/bbl e para os produtores não-OPEP de US\$10/bbl, fazendo que em equilíbrio a produção da OPEP seja maior. No exemplo de Dutta, o preço de equilíbrio em Cournot foi pouco mais de US\$ 26/bbl, bem acima dos custos de produção de ambos os jogadores. Além disso, se os produtores não-OPEP se juntassem a OPEP num cartel gigante, a produção seria reduzida (cortando as de mais alto custo) e os preços iriam para US\$ 35/bbl nesse exemplo.

Dutta (1999, cap.17) mostra o caso da OPEP à luz dos jogos dinâmicos repetidos. Os chamados *teoremas populares* (“folk theorems”) para jogos repetidos, mostram que é possível sustentar equilíbrios em colusão se os jogos forem repetidos infinitas vezes. Dutta analisa o jogo de cotas interno da OPEP considerando apenas dois países, sendo um país (Arábia Saudita) com maior capacidade de produção do que o outro (Venezuela). Ele considera que esses países podem escolher a suas produções (dois cenários para cada, alta e baixa) e analisa duas diferentes conjunturas de demanda mundial de petróleo, alta demanda e baixa demanda. Quando a demanda é baixa, além de ser EN quando ambos escolhem alta produção, também o lucro *conjunto* é maior com essa estratégia (isso depende dos parâmetros usados)³⁰³. No entanto, quando a demanda é alta, Dutta mostra que existe uma situação típica do conhecido jogo “dilema dos prisioneiros”³⁰⁴, em que o EN é dado por ambos escolherem produção alta, mas o lucro conjunto é maximizado com ambos escolhendo produção baixa. A pergunta do exemplo é: pode a OPEP manter os preços altos nos tempos de alta demanda?

³⁰³ Isso realmente se verificou nos tempos de baixa demanda (décadas de 50 e 60), mas não em fevereiro de 1999 quando, devido aos baixíssimos preços, até países não-OPEP (ex.: Noruega) cortaram a suas produções. Naquele ano, os preços dobraram em menos de 10 meses.

³⁰⁴ No dilema dos prisioneiros, existe um resultado (ambos “não confessam”) que é melhor para ambos, mas que não é EN (existe um incentivo para desviar). O único EN é um resultado pior para ambos. Em jogos infinitamente repetidos, pode-se “escapar” desse resultado pior.

Isso depende da comparação entre lucro de curto prazo (incentivando o desvio para produzir mais) e o lucro de longo prazo, já que o jogo se repete infinitamente. Assim, Dutta mostra que o incentivo a desviar depende da taxa de desconto do fluxo de caixa, se ela for pequena o lucro de longo prazo será mais importante e não haveria incentivo a desviar. Mas se ela for grande, há incentivo para desviar em função do lucro de curto prazo ser relativamente mais importante. Além disso, ele mostra que os produtores menores têm maior incentivo de desviar do que a Arábia Saudita no caso de alta demanda.

Existem várias simplificações nos exemplos de Dutta, de forma que esses resultados devem ser olhados com cuidado. Por ex., no lado dos altos preços, existe a possibilidade de novas fontes de energia se tornarem mais importantes, além da ampliação da participação no mercado de produtores não- OPEP. No lado dos baixos preços, existe a possibilidade de abandonos irreversíveis de campos de petróleo, que fazem automaticamente haver uma redução da produção mundial.

Dixit & Skeath (1999, p.269-271) também analisam as maneiras de como escapar do dilema dos prisioneiros e citam a OPEP. Esse livro texto estuda três maneiras para se escapar do dilema dos prisioneiros: (a) repetição dos jogos; (b) uso de penalidades e recompensas³⁰⁵; e (c) liderança. O aspecto de liderança é relevante para o caso da OPEP devido ao papel da Arábia Saudita como produtor flexível (“swing producer”). Ou seja, para induzir uma posição cooperativa, o maior produtor (líder) age cooperativamente (reduzindo a sua produção), mesmo sabendo que vários países irão desrespeitar o acordo do cartel. Dixit & Skeath mostram um exemplo em que, se um dos jogadores for bem mais forte do que o outro, pode ser ótimo (EN) cooperar, mesmo com o outro não cooperando. Isso explicaria a atitude da Arábia Saudita de cortar a sua produção, mesmo com os outros não fazendo o mesmo. Outro exemplo de liderança citado é os EUA, que durante décadas adotou uma política tarifária relativamente não-protecionista, mesmo com seus aliados como Japão e Europa sendo muito mais protecionistas.

No contexto de jogos de OR esse tema tem sido muito pouco analisado. Uma exceção é Tvedt (1999), que analisa a OPEP e não-OPEP como um duopólio

³⁰⁵ A queda brusca do preço do petróleo em 1986 é vista por muitos como uma punição da Arábia Saudita aos países que estavam sistematicamente violando as cotas acordadas.

com um líder e um seguidor, considerando que a demanda é estocástica, a fim de determinar características como a dinâmica dos preços resultante.

4.1.5.3.

Jogos Evolucionários

A teoria dos jogos tem sido usada em biologia para modelar o comportamento dos animais em conflito e especialmente a *evolução das espécies*. Foi nesse ramo da ciência que nasceu a chamada teoria dos jogos evolucionários e o refinamento do EN chamado de estratégia evolucionária estável (ESS, “evolutionary stable strategy”). Esse conceito chave de equilíbrio, assim como o nascimento desse ramo da teoria dos jogos é devido a Maynard Smith & Price (1973) e nasceu praticamente de forma simultânea com a análise dos jogos de guerra de atrito (Maynard Smith, 1974). Ver também Maynard Smith (1982) e Hammerstein & Selten (1994) para uma discussão mais detalhada desse ramo da teoria dos jogos. Existe uma literatura crescente em econômica usando o conceito de ESS para selecionar um de múltiplos EN, em diversas aplicações. Dentre os livros texto de teoria dos jogos evolucionários com enfoque econômico, deve-se destacar Samuelson (1997), Vega-Redondo (1996) e Gintis (2000).

Definição. ESS em estratégias mistas: Uma estratégia mista σ é ESS se e somente se: (a) É a melhor resposta para si mesma; e (b) para qualquer estratégia alternativa (*mutante*) melhor resposta σ' para σ , ela é melhor do que σ' é contra si mesma, i.é., para todas as estratégias disponíveis $\sigma' \neq \sigma$ com lucros (ou valores) $\pi_1(\sigma', \sigma) = \pi_1(\sigma, \sigma)$, deve-se ter $\pi_1(\sigma, \sigma') > \pi_1(\sigma', \sigma')$. A condição (a) simplesmente diz que um ESS tem de ser equilíbrio de Nash consigo mesmo e a condição (b) é a *condição de estabilidade* contra a invasão de estratégias mutantes.

Maynard Smith (1982, appendix B) mostrou que um jogo matricial com dois EN em estratégias puras sempre tem um ESS e provou que a eq. (247) do jogo do medroso (ver item 4.1.2) é um ESS. Revisitando o jogo do medroso, considere que os jogadores são iguais (mesmos valores ou “payoffs”). O único equilíbrio *simétrico* é aquele em estratégias mistas ($p_i = p_j$, não necessariamente 50%). A teoria dos jogos evolucionários dá uma racionalidade importante para selecionar um dos múltiplos (três, no jogo do medroso) EN, escolhendo aquele que também é ESS. No jogo do medroso o único ESS é o equilíbrio de Nash em

estratégias mistas. ESS's são estratégias *dinamicamente estáveis* no sentido que elas são aptas a resistir à infiltração de estratégias alternativas chamadas de estratégias mutantes. Assim, ESS's são resultados mais prováveis no longo prazo. Além disso, nos jogos com dois jogadores, o ESS é também um *equilíbrio perfeito em subjogos* (ENPS), pois um ESS não admite estratégias fracamente dominadas. Mas mesmo em jogos finitos a existência de um ESS não é garantida, enquanto que foi visto no item 4.1.1 que pelo menos um ENPS sempre existe em jogos finitos. ESS é uma condição mais robusta que o ENPS.

A teoria dos jogos evolucionários também tem sido analisada na forma extensiva Γ_E . O livro texto de Cressman (2003) é quase inteiramente dedicado a esse tópico na forma extensiva, incluindo uma detalhada discussão sobre o jogo de guerra de atrito sob essa perspectiva (p. 207-217).

4.2. Jogos de Opções Reais

4.2.1. Introdução e Estratégias de Gatilho

4.2.1.1. Histórico e Literatura de Jogos de Opções Reais

A demanda prática e teórica de modelos de opções reais considerando também a interação estratégia racional entre jogadores (firmas)³⁰⁶, em que o exercício da opção de um jogador altera os valores de OR de outros jogadores, levou ao nascimento da literatura dos *jogos de opções reais em tempo contínuo*³⁰⁷. Isso ocorreu no começo dos anos 90 com a dissertação de Smets (1993, depois de um artigo de trabalho em 1991)³⁰⁸. Já a literatura dos jogos de OR em tempo discreto começou com Smit & Ankum (1993), com uma abordagem intuitiva para importantes modelos de jogos de opções; e com Smit & Trigeorgis, também em 1993³⁰⁹, que analisaram outros aspectos.

³⁰⁶ Esse item é baseado principalmente nos artigos de Dias & Teixeira (2003) e (2004).

³⁰⁷ O termo “option games” apareceu primeiro em Lambrecht & Perraudin (1994).

³⁰⁸ Esse modelo foi sintetizado em Dixit & Pindyck (1994, chapter 9). Esses autores tomaram o *atrativo risco* de incluir no seu livro o na época recente modelo inovador de Smets (1993). O preço foram dois erros menores de interpretação apontados por Huisman & Kort (1999).

³⁰⁹ Esse último é bem sumarizado no livro texto do Trigeorgis (1996, chapter 9).

A teoria dos jogos é uma ferramenta bem estabelecida na área de organização industrial e para modelar competição imperfeita. Entretanto, a teoria dos jogos tradicional sozinha ignora os avanços da teoria de finanças sobre risco-retorno e sobre o valor da flexibilidade gerencial sob incerteza. A teoria dos jogos e a teoria das opções são abordagens complementares, que juntas fornecem uma metodologia rigorosa com um rico potencial de aplicações.

Sobre a combinação entre a teoria das opções e a teoria dos jogos, Ziegler (1999, p.133) escreveu: “*a teoria dos jogos com análise de opções substitui a maximização da utilidade esperada encontrada nos modelos de teoria dos jogos clássica com a maximização do valor de uma opção ... a abordagem de opções tem a vantagem que automaticamente leva em conta o valor do dinheiro no tempo e o risco*”. Ele também destaca a “ligação entre mercados e organizações” com a teoria das opções determinando o valor baseado em critérios de mercado, e a teoria dos jogos levando em conta a estrutura da organização.

O primeiro *livro texto* dedicado só a jogos de opções reais foi Huisman (2001), focando em importantes modelos teóricos de jogos de OR em tempo contínuo, principalmente para aplicações de momento ótimo de adoção de uma nova tecnologia. Antes, Grenadier (2000a) editou uma boa seleção de artigos de jogos de opções. Dois livros recentes completam a lista de livros dedicados a jogos de OR. Primeiro, o livro texto de Smit & Trigeorgis (2004), bastante acessível e que foca principalmente modelos em tempo discreto, com vários exemplos práticos. O outro é o livro de Thijssen (2004), que segue uma linha similar à de Huisman (2001) em aplicações de adoção de tecnologia, mas com outros modelos, por ex., considerando a redução da incerteza com o tempo. Alguns modelos de Thijssen (2004) tem alguns pontos de contato com o modelo do cap. 5, e por isso ele será discutido um pouco mais abaixo.

Como será visto, em muitos casos as ferramentas de opções reais são suficientes para analisar jogos de OR, sem a necessidade de usar técnicas mais complexas tais como a busca de pontos fixos (ver Border, 1985, para uma análise detalhada desses métodos em teoria dos jogos e economia) das correspondências de melhor resposta dos jogadores. Não foi por acaso que uma extensa pesquisa bibliográfica feita pelo autor indicou que a grande maioria dos artigos de jogos de OR vem de *pesquisadores de OR e não de teoria dos jogos*. Ferramentas tais

como processos estocásticos e controle ótimo estocástico são, geralmente, mais úteis do que teoremas de ponto fixo e outras ferramentas relacionadas. Mas o conhecimento adequado da teoria dos jogos é sempre necessário para o engenheiro financeiro que desenvolve modelos de jogos de opções. Além disso, um outro caminho promissor para resolver os jogos de OR vem de dois pesquisadores de teoria dos jogos, Dutta & Rustichini (1995). Eles provaram que o mapa de melhor resposta satisfaz uma condição forte de monotonicidade, a qual é usada para determinar a existência do conjunto de equilíbrios perfeitos de Markov. Esse caminho poderia ser aplicado no caso de guerra de atrito sob incerteza do cap. 5.

Além de pesquisadores de OR e de teoria dos jogos, uma terceira escola de pesquisadores podem contribuir para a literatura de jogos de OR. São pesquisadores da área de controle ótimo (pesquisa operacional) que se interessaram por teoria dos jogos, especialmente no ramo de jogos estocásticos *diferenciais*. Dois exemplos são: Basar & Olsder (1995) e Dockner et al (2000). Entretanto, a ponte entre a teoria dos jogos de opções e esse ramo da literatura de controle ótimo, ainda precisa ser construída.

Nas próximas seções serão estudados, no contexto de jogos de OR, os casos de duopólio simétrico, duopólio assimétrico e oligopólio. Em todos os casos a demanda será incerta e será discutida a literatura existente sobre esses temas. O caso de guerra de atrito e jogos com externalidade positiva, que será desenvolvido só no cap.5, será agora objeto de uma pequena revisão sobre o que existe de relacionado na literatura de jogos de OR.

Thijssen (2004) aborda jogos de opções reais com tanto em alguns casos de competição, como em alguns casos de externalidade positiva. No caso de externalidade positiva (“spillover” em Thijssen), a abordagem difere dessa tese – explicada em boa parte pela diferença de tipo de aplicação³¹⁰. Por ex., ele usa o tempo como indexador de um processo de redução de incerteza (Thijssen, 2004, p.6). Como foi visto no final do item 3.4.3, pelo menos em aplicações de exploração de petróleo, o tempo corre mais rápido na parte de cima do *processo de difusão de eventos* (sinais) da Figura 52 do que na parte de baixo. Os sinais que

³¹⁰ Thijssen está mais interessado no momento ótimo de adoção de uma tecnologia. Esse é um tema com importantes aplicações em *organização industrial* (ver Tirole, 1988).

reduzem a incerteza são exercícios de opções. Por isso é melhor considerar o processo de revelação (redução de incerteza) como um processo de difusão de eventos e não um processo de difusão tradicional indexado pelo *tempo*.

Embora Thijssen (2004, p.9 e cap. 5) tenha abordado o jogo de guerra de atrito em opções reais, o modelo é muito diferente do modelo da tese não apenas pela questão de indexação tempo x eventos, como também por usar jogo de horizonte infinito (em E&P é finito) e por outros aspectos. Por ex., em Thijssen a firma que investir primeiro revela toda a verdade sobre o estado do projeto do outro. Já aqui existe uma revelação parcial – e mais importante – o poder dessa revelação (medida por η^2) irá depender do *tipo* de jogo. Ou seja, aqui é feita uma análise bem mais rica da revelação de informações com diferentes exercícios de opções e bem diferente de Thijssen, que por sua vez foca questões que são de menor interesse para o tipo de aplicação da tese.

Assim como Thijssen (2004), Décamps & Mariotti (2004) também analisam um jogo de guerra de atrito com dois tipos de sinais: sinais de uma fonte *exógena* (chamada de “background signals”), geralmente revelados aleatoriamente segundo um processo de Poisson; e sinais de uma fonte *endógena*, geralmente mais fortes, emitidos pelos jogadores quando exercem a sua opção. Embora a aplicação do cap.5 de guerra de atrito seja focada apenas na revelação de informação endógena, poderia ser considerado também um processo exógeno de sinais mais fracos em paralelo, por ex., com a perfuração de poços mais distantes. O modelo de processo de revelação mostrado no cap. 3 pode ser usado até de uma maneira mais realista do que um processo de Poisson. O processo de revelação estudado pode ser usado para não só atualizar os fatores de chance, como para regular as probabilidades de sinais positivos e negativos, de forma que a frequência de sinais é maior no caso de revelação positiva do que a negativa, refletindo o aumento da probabilidade de exercício de opções (perfurações) com as boas notícias e a redução dessa probabilidade com as más notícias. Um processo de Poisson tradicional, como usado em Thijssen (2004) e em Décamps & Mariotti (2004), não captura essas diferenças de tempo esperado de ocorrência dos sinais. O uso de duas fontes de sinais (exógeno e endógeno) no contexto de um processo de revelação, é deixado como futura extensão, pois no cap. 5 será trabalhado o caso mais simples, usando apenas o sinal endógeno, a fim de permitir uma exposição mais clara do foco principal do jogo, inclusive a possibilidade de *troca de jogo*.

O jogo de OR de Décamps & Mariotti (2004), embora também seja uma guerra de atrito envolvendo aprendizagem com o exercício da opção do jogador rival, difere em muitos outros aspectos do analisado nessa tese (especialmente a aplicação do cap. 5). Por ex., eles consideram que valor do projeto é igual para ambos os jogadores, embora desconhecido (os sinais ajudam a revisar as probabilidades sobre esse valor que é igual para ambos) e a informação é simétrica sobre esse valor (ambos os jogadores sabem que os valores do retorno do projeto são iguais para ambos os jogadores). Nessa tese, os valores dos projetos são diferentes entre os jogadores³¹¹ e eventualmente existe assimetria de informação, mas sobre o *valor do projeto* do outro³¹². Por outro lado, em Décamps & Mariotti (2004) os custos de investimento são desiguais e a informação sobre esses custos são informações privadas de cada firma, i. é, existe informação assimétrica sobre esses custos de investimento. Já na aplicação de interesse da tese, os custos de exercício das opções não são informações privadas e geralmente são aproximadamente iguais, conforme justificado a seguir.

Em muitas indústrias, o custo é um fator estratégico que diferencia os jogadores (as firmas), pois impulsiona uma competição de preços e/ou a entrada em novos mercados (novos investimentos). Em exploração de petróleo isso não ocorre por algumas razões³¹³. Primeiro, as companhias de petróleo (exceto OPEP) são *tomadoras de preços* e não formadoras de preços. Isso significa que *não* existe competição por *preço*. Segundo, o custo de investimento da perfuração de um poço é conhecido, pois o principal elemento de custo, a *taxa diária de sondas*, é um valor de mercado divulgado em revistas especializadas³¹⁴. A grande maioria das empresas de E&P de petróleo não tem sondas próprias (ou tem numa quantidade mínima, geralmente para manutenção de poços) e contratam sondas no

³¹¹ Por ex., os tamanhos das estruturas mapeadas pela sísmica são q.c. diferentes de um bloco para o outro. Geralmente ambos os jogadores têm uma idéia de quem tem a maior estrutura, pois ambos tiveram acesso aos registros sísmicos antes do leilão dos blocos.

³¹² Eventualmente, pode existir dúvida de qual estrutura é maior, pois o registro sísmico disponível antes do leilão (de conhecimento comum) pode ser de má qualidade e geralmente as firmas ao ganharem um bloco no leilão, fazem uma sísmica mais detalhada (a sísmica 3D) antes de pensar em perfurar, o que *pode* revisar a ordem relativa de qual estrutura é maior.

³¹³ Essa explicação detalhada está sendo dada por ser uma dúvida comum. Em Montreal (2004), o autor foi questionado por um pesquisador sobre assimetria de informação no custo.

³¹⁴ Exs.: Petrodata Ltd; ODS-Petrodata (<http://www.ods-petrodata.com>), etc. Como mencionado no item 2.1.3, McCormack & Sick (2001) fizeram um estudo de correlação entre taxas diárias de sondas e preços do petróleo. Se as taxas diárias de sondas fossem informação privada, eles não poderiam fazer esse estudo.

mercado. Mesmo que uma firma use uma sonda contratada cujo valor do contrato não tenha sido divulgado, o custo de investimento da perfuração tem de ser feito com o valor de mercado (*custo de oportunidade*) e não com o valor histórico/contábil do contrato específico de uma sonda³¹⁵. A taxa diária de sondas, um valor de mercado (logo sem assimetria de informação), responde pela maior parte do custo de investimento (ou de exercício da opção de perfurar) que é o produto da taxa diária de sondas pelo número médio de dias de perfuração. Uma parcela bem menor, os custos de insumos como lama de perfuração e tubos de revestimento, também são valores de mercado conhecidos. Sendo essa sonda operado pela firma contratada (pela dona da sonda, uma terceira empresa), o número esperado de dias de perfuração não depende da eficiência da companhia de petróleo (e sim da operadora contratada) e é função principalmente da *profundidade* do objetivo a ser perfurado. Se as firmas estão perfurando em prospectos correlacionados, esses devem ter a mesma idade geológica e assim ter profundidades similares. Mas caso haja alguma diferença relevante de profundidades dos prospectos, essa informação em geral também não é assimétrica porque ambas as firmas tiveram acesso aos mesmos registros sísmicos antes do leilão e tem uma boa idéia de quem tem o objetivo mais profundo.

Assim, o mais razoável no caso específico de E&P de petróleo é considerar os custos de investimento (perfuração) como sendo aproximadamente iguais e de conhecimento comum. O que realmente é desigual – e eventualmente assimétrico, é o valor do campo em caso de descoberta. Isso porque as firmas têm prospectos com diferentes tamanhos das estruturas, geólogos com diferentes estimativas de probabilidades de sucesso, diferentes taxas de desconto corporativas, etc.

Essa diferença do que é (ou pode ser) assimétrico no problema da tese e no artigo de Décamps & Mariotti (2004) tem importantes conseqüências no *método de solução do jogo* guerra de atrito. Décamps & Mariotti (2004, p.82) não podem usar *estratégias de gatilhos* (“trigger strategy”) simples como é aqui usada, pois no modelo deles *não* existe uma correspondência 1-1 entre o que os jogadores conhecem sobre o valor do projeto e o que conhecem sobre o custo de

³¹⁵ Isso é aceito rotineiramente na indústria de E&P de petróleo, não só por ser o correto em termos de análise de FCD, como para evitar distorções: se fosse usado o custo do contrato, todos os gerentes de ativos iriam querer a sonda com o contrato mais barato para reduzir seus custos ou melhorar os projetos. Na Petrobras é norma usar o valor de mercado e não o valor contratual.

investimento do rival³¹⁶. Como eles mesmos reconhecem, quando o valor do projeto é desconhecido e assimétrico existe sempre uma correspondência 1-1 entre o que um jogador sabe sobre o rival e o quanto ele pode obter em média ao investir. Sob essa ótica, o problema da tese é mais simples do que o analisado em Décamps & Mariotti (2004), pois aqui é possível usar estratégias de gatilhos e no modelo deles não pode. Por outro lado, devido a essa complexidade, eles optaram por uma estrutura de informação (relação sinal com a variável de interesse) mais simples do que a desenvolvida nessa tese (cap.3).

Huisman (2001, pp.205-208) analisou jogos de externalidades positivas, mas o tipo analisado foi mais um jogo com *efeitos de rede*, onde o valor do exercício simultâneo pode ser maior que o valor do seguidor, do que o jogo guerra de atrito como definido por Fudenberg & Tirole (1991) ou Maynard Smith (1982).

4.2.1.2.

Estratégias de Gatilho em Jogos de Opções Reais

Os jogos de OR em tempo contínuo, na grande maioria dos casos analisados na literatura, são resolvidos com estratégias ótimas para os jogadores que são denominadas *estratégias de gatilho simples* (“trigger strategy”), que integram a solução (equilíbrio) do jogo. Essas estratégias podem ser vistas como a ação ótima de jogadores (firmas) que *consideram as melhores respostas dos rivais* e fazem sua otimização em *retro-indução* (“backwards”) no estilo da programação dinâmica. Dessa forma, essas estratégias serão ENPS ao induzir um EN em todo o subjogo que começa num instante $t \geq 0$ qualquer³¹⁷.

Isso significa que a metodologia de OR na valoração sob incerteza é *quase* toda a solução do jogo, desde que se considerem as ações ótimas (melhor resposta) também dos *outros* jogadores de forma endógena no modelo. Isso é feito em vários artigos da literatura de jogos de OR, inclusive o modelo clássico de Smets analisado em Dixit & Pindyck.

Mas foi mencionado que nem sempre é possível usar estratégias de gatilho simples para resolver problemas de jogos de OR: Décamps & Mariotti (2004, p.82) não podem usar essas estratégias simples pois no modelo deles não existe uma correspondência 1-1 entre o que os jogadores conhecem sobre o valor do

³¹⁶ Ou seja, para cada cenário da distribuição de valor do projeto, existem vários possíveis custos de investimento do oponente (uma outra distribuição).

³¹⁷ Não se está dizendo que esse método identifica *todos* os ENPS.

projeto e o que conhecem sobre o preço de exercício da opção. Também Murto (2002) argumenta que em alguns casos essas estratégias simples fazem desaparecer outros ENPS e considera o caso mais complexo de conjuntos desconectados de exercício (“disconnected stopping set”). Mesmo em problemas de OR sem interação estratégica, existem casos em que não se podem usar estratégias de gatilho simples: no cap. 2, item 2.4.2 (ver Figura 17), em vez de um gatilho para investir numa alternativa, se tinha um *conjunto* (intervalo de preços do petróleo) de investimento ótimo, com regiões intermediárias de espera desconectando essas regiões de exercício ótimo. Ou seja, também é um exemplo de “disconnected stopping set” mencionado por Murto (2002), mas no contexto de OR tradicional. Em termos técnicos, em vez de um *valor* de parada ótima se tem um *conjunto(s) de parada ótima*. No entanto, Lambrecht (2001) num problema similar ao de Murto, forçou os conjuntos de exercício serem conectados e resolveu mais facilmente o problema, sendo criticado por Murto (2002) por achar apenas o principal (único) ENPS ao não considerar a possibilidade de conjuntos de exercício desconectados que gerariam ENPS menos intuitivos³¹⁸.

Felizmente, a grande maioria dos problemas de OR não tem essas complicações e podem ser usadas estratégias de gatilho simples tais como “invista para $P \geq P^*$ ” ou “abandone para $P < P^{**}$ ”. Em termos de *jogos de parada ótima*, se diz “entre no mercado em $t = t^*$ ”, estipulando o *tempo de parada ótima* como o primeiro instante em que uma variável estocástica atinge um certo valor de gatilho. Dessa forma, definindo o gatilho estará definido o tempo de parada ótima como o ínfimo tempo que a variável estocástica atinge o valor de gatilho.

Para essa classe de jogos de OR em tempo contínuo em que podem ser usadas estratégias simples de gatilhos é que se enunciará a seguinte proposição, a qual é a principal contribuição do cap. 4 da tese à literatura.

Proposição 8: Sejam os jogos de OR em tempo contínuo, sendo que as estratégias podem ser caracterizadas como estratégias de gatilho simples (“trigger strategy”). Então existem *pelo menos* dois métodos equivalentes para resolver esses jogos. O primeiro é o método diferencial e o segundo é o método integral. Em ambos, se obtém os *valores* dos jogadores executando as estratégias ótimas

³¹⁸ Lambrecht (2001) assumiu como premissa (“Assumption 4”, p.771) a restrição que cada firma só usa estratégias de gatilho simples, exatamente para descartar estratégias mistas e EN não intuitivos, por ex., uma firma abandonar o mercado após uma *elevação* de preços.

definidas por *gatilhos*. Com os valores e gatilhos dos jogadores, se tem os elementos para a análise de equilíbrio. Esses dois métodos são resumidos a seguir:

(a) Método Diferencial: usa os métodos tradicionais de OR em que equações diferenciais estocásticas (ordinárias ou parciais) descrevem os valores dos jogadores. A otimização das estratégias dos jogadores, que considera as melhores respostas dos rivais de forma endógena, é feita através das condições de contorno de continuidade e de contato suave.

(b) Método Integral: usa uma soma de integrais estocásticas para descrever os valores dos jogadores, em que os limites de integração são tempos de parada ótima combinados com tempos limites triviais (0 e ∞). Esses tempos de parada ótima são definidos como os ínfimos tempos em que a variável estocástica atinge um valor de gatilho. A otimização das estratégias dos jogadores, que considera as melhores respostas dos rivais de forma endógena, é feita através de métodos tradicionais de otimização, tais como a *condição de primeira ordem*, associado ao conceito de *valor esperado do fator de desconto estocástico*, que dá a atualização de um valor obtido pelo exercício ótimo de uma OR no tempo de parada T^* .

Prova: Será feita através de exemplos clássicos de duopólios simétricos e assimétricos nos itens 4.2.2 e 4.2.3, em que se mostrará que ambas são aplicáveis aos problemas de jogos de OR e resultam nos mesmos valores. Nesses jogos, os valores dos jogadores exercendo otimamente as opções e as suas estratégias ótimas definidas por gatilhos, serão suficientes para caracterizar equilíbrios em estratégias puras e em estratégias mistas desses jogos.

Em alguns casos da literatura, como em Dixit & Pindyck (1994, cap.9), houve uma combinação de métodos, usando o método diferencial para achar o valor e o gatilho do seguidor e o método integral para calcular o valor e o gatilho do líder³¹⁹. Aqui (item 4.2.2), usando um caso simétrico um pouco mais complexo, se mostrará que se poderia usar só o método diferencial ou só o método integral para solucionar esse jogo de OR. Por ex., para calcular o valor e o gatilho do líder com o método diferencial, basta usar a equação diferencial que rege o valor do líder *durante a sua fase de monopólio*³²⁰, considerando como *condição de contorno* o instante em que existe o exercício da OR do *outro* jogador, que faz

³¹⁹ Embora Dixit & Pindyck não tenham calculado explicitamente o valor do gatilho do líder, ficou claro (p. 312) que um método simples de otimização poderia calcular esse gatilho.

³²⁰ E não o valor da *opção de investir e se tornar líder*, que é um valor secundário no jogo.

a curva de valor do líder ser côncava. Isso não foi notado antes pelos analistas desse jogo clássico de OR (Dixit & Pindyck, Huisman & Kort, Grenadier, etc.).

O método integral também pode ser usado sozinho na solução de jogos de OR, embora também venha sendo usado parcialmente. Por ex., o *valor do seguidor* em Dixit & Pindyck poderia ser calculado com uma única integral estocástica, a qual é resolvida com uma simples equação do valor esperado do fator de desconto estocástico, que dá o valor do seguidor em função do gatilho do seguidor. Esse gatilho pode ser obtido com a otimização tradicional (condição de primeira ordem) e novamente com o conceito de valor esperado do fator de desconto. Em casos mais gerais, pode haver uma soma de duas integrais (como em Dixit & Pindyck para calcular o valor do líder) ou mais integrais. Isso depende dos *tempos de parada ótima* relevantes do problema que irão determinar como devem ser divididas as fases do jogo (e logo os limites de integração), fases essas marcadas por exercícios de OR. Por ex., uma fase inicial (sem exercício), uma fase em que uma firma tem monopólio (um exercício de opção) e fase em que as duas firmas produzem em duopólio (já exerceram as duas opções).

Deve-se mencionar que o método diferencial é de longe o mais usado em OR. O método integral em problemas tradicionais de OR, foi mais bem estabelecido com o artigo de Dixit & Pindyck & Sødal (1999), sendo que os casos menos favoráveis de aplicação são quando a opção tem maturidade finita, já que o método é fortemente analítico. Além disso, existem algumas situações em que um método é mais simples que o outro e vice-versa. Esses e outros pontos metodológicos serão ilustrados nos exemplos dos itens 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4. No apêndice 9.2, são discutidos tópicos úteis para o método integral, tais como o tempo esperado de toque de um processo Browniano, o fator de desconto esperado e métodos de otimização sob incerteza usado no método integral.

4.2.2. Duopólio sob Incerteza Simétrico

A diferença básica dos modelos que serão analisados no restante desse capítulo, em relação aos modelos tradicionais, é a presença de uma demanda incerta, que flutua ao longo do tempo de forma exógena aos jogadores. Considere a seguinte função inversa da demanda genérica estocástica:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{D}(Q_T) \quad (269)$$

Onde P é o preço, $D(Q_T)$ é a função (inversa) demanda, Q_T é a produção total da indústria e Y é um choque estocástico multiplicativo da demanda, sendo $Y(t = 0) = 1$ e o valor futuro $Y(t > 0)$ é incerto e modelado com um processo estocástico. Ou seja, a eq. (265) de função demanda determinística é multiplicada por um choque estocástico e assim o preço muda não só com a produção dos jogadores, mas também pela simples passagem do tempo (evolução da economia).

Para facilitar a intuição sobre a demanda estocástica, considere o exemplo numérico com a função demanda linear: $P = Y(500 - 25 Q_T)$. A Figura 59 mostra a curva de demanda inicial ($Y = 1$) e uma curva futura de demanda depois de choques estocásticos que aumentaram a demanda para $Y = 2$.

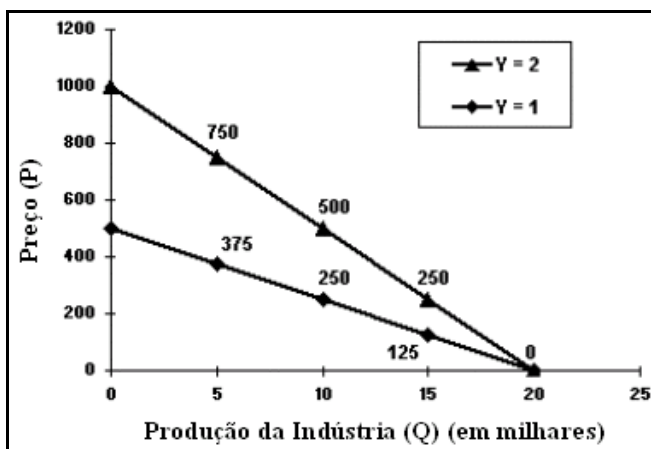


Figura 59 – Incerteza na Curva de Demanda

A Figura 59 mostra que se a produção da indústria é 10.000 unidades (por ano), o preço do produto é inicialmente de \$250 por milhar. Se a variável estocástica dobra, o mesmo ocorre com o preço (sobe para \$500/1.000 unidades).

O modelo de duopólio sob incerteza simétrico foi o primeiro modelo conhecido de jogos de OR devido a Smets (1993). Em adição à sua relevância histórica, esse modelo tem grande importância teórica – fundações dos jogos estocásticos de parada ótima em tempo contínuo – e também significado prático para duopólios quando não existe vantagem competitiva de uma firma. Na indústria do petróleo, imagine duas firmas disputando uma região no mercado de abastecimento de derivados e pensam em investir numa nova base de distribuição.

Esse item sumariza a análise profunda feita por Huisman & Kort (1999). Eles estenderam a literatura existente sobre esse modelo (Smets, Dixit & Pindyck) em várias maneiras, especialmente permitindo equilíbrios em *estratégias mistas* e analisando a possibilidade de equilíbrios em *colusão tácita* “non-binding

collusion”. Em adição, eles apresentaram várias proposições que estabelecem as condições para a ocorrência de diferentes equilíbrios, de uma maneira rigorosa. Por razões de espaço, serão mostrados apenas resultados selecionados³²¹. A explanação aqui apresenta apenas modificações menores em relação à notação original. No entanto, foram incluídos alguns tópicos não discutidos por Huisman & Kort, por ex., as *duas maneiras de se calcular os valores do líder e do seguidor* (a pequena contribuição dessa tese para a literatura de jogos de OR) e algumas explicações adicionais não discutidas no artigo deles.

Esse modelo de duopólio é simétrico no sentido das firmas serem homogêneas (firmas iguais), de forma que isso sugere estratégias simétricas. Será evitado o formalismo na descrição das estratégias, dando preferência para uma completa, mas mais intuitiva abordagem. Ao longo do texto ficarão claras tanto as estratégias de exercício da opção, como as estratégias de espera, para cada estado da natureza (que muda com o tempo) e condicionais às estratégias ótimas da outra firma³²².

A primeira diferença do modelo de Huisman & Kort, quando comparado com Smets ou Dixit & Pindyck, é que as duas firmas já estão ativas no mercado, produzindo uma unidade cada (por unidade de tempo) e elas estão considerando o exercício de uma (definitiva) *opção perpétua de expansão* da produção. Isso significa que a “entrada” (leia-se *expansão*) de uma firma afeta o lucro corrente da outra firma – no caso reduzindo o lucro pois aqui o modelo considera a *externalidade negativa* no preço dada pela curva de demanda. O investimento para expandir a produção (preço de exercício da OR) é o mesmo para as duas firmas e denotado por I . As firmas fazem face a uma curva (inversa) de demanda que dá o *fluxo de lucro* $P(t)$ na venda de uma unidade e que é dada por:

$$P(t) = Y(t) \cdot D(N_i, N_j) \quad (270)$$

Onde $Y(t)$ é um choque estocástico da demanda que segue um movimento geométrico Browniano (MGB, ver cap.2), com tendência α e volatilidade σ ; e

³²¹ Ver <http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly2.html>, para outros resultados e gráficos.

³²² Entretanto, uma descrição mais formal das estratégias do jogo de parada ótima *contínuo* que começa no instante t , requer *duas* funções para cada jogador i . Uma é $(G_i, \alpha_i): [t, 1] \times [t, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, onde $G_i(\tau)$ é a função acumulada de probabilidade de exercício, e a outra é $\alpha_i(\tau)$, o *átomo de probabilidade* (ver discussão sobre estratégias mistas). O tempo é normalizado, de forma que um jogo de horizonte infinito com tempo $s \in [0, \infty]$ é normalizado para $\tau \in [0, 1]$ através da função $\tau = s / (s + 1)$.

$D(N_i, N_j)$ é um parâmetro de demanda determinístico *para a firma i*, o qual depende dos status das firmas i e j. Os possíveis valores para $D(N_i, N_j)$ são:

- $D(0, 0)$ significa que ambas as firmas não investiram ainda (mas existe um fluxo de lucro $Y D(0, 0)$ porque as firmas estão ativas no mercado);
- $D(1, 0)$ significa que a firma i investiu e é a “líder” porque a firma j ainda não investiu;
- $D(0, 1)$ significa que a firma i é a “seguidora” porque só a outra firma (j) investiu e se tornou a líder; e
- $D(1, 1)$ significa que ambas as firmas investiram no mercado (investimento simultâneo).

Esses fatores $D(N_i, N_j)$ são ajustados para o nível de produção. O custo operacional é zero ou já está incluído em D , de forma que P é interpretado como *fluxo de lucro* em vez de preço. Por ex., o fluxo de lucro do líder é $Y.D(1, 0)$ e esse fluxo de lucro é maior que $Y.D(0, 0)$. Ou seja, o efeito da maior produção obtida quando se investe e se assume o papel de líder, já está incluída no valor de $D(1, 0)$. A mudança de status de $D(0, 0)$ para $D(1, 0)$ demanda um custo afundado de investimento I . Além disso, devido à simetria do problema, quando uma firma está lucrando $Y D(1, 0)$, a outra firma está lucrando $Y D(0, 1)$, etc. Para o caso que eles chamam de *modelo de mercado novo* (“new market model”), i. é, o caso original de Smets e de Dixit & Pindyck em que as firmas *não* estão ativas no mercado em $t = 0$, se tem o caso particular $D(0, 0) = D(0, 1) = 0$.

Huisman & Kort assumem que as firmas são neutras ao risco, de forma que o desconto é feito com a taxa livre de risco. Entretanto, é fácil estender o caso para firmas avessas ao risco usando o método dos *ativos contingentes* (ver cap. 2) supondo que o termo de tendência α do processo estocástico real é substituído pela tendência livre de risco (ver cap. 2, a comparação das eqs. 9 e 4).

Os parâmetros de demanda determinística têm uma restrição adicional de *externalidade negativa* (o exercício da OR de uma firma reduz o valor da outra firma) dada pela desigualdade:

$$D(1, 0) > D(1, 1) > D(0, 0) > D(0, 1) \quad (271)$$

A outra premissa do modelo é a *vantagem do primeiro lance* (“first mover advantage”), dada pela desigualdade:

$$D(1, 0) - D(0, 0) > D(1, 1) - D(0, 1) \quad (272)$$

Essa desigualdade diz que o ganho de começar como líder é maior que o ganho de começar como seguidor (para o mesmo Y e o mesmo investimento I).

Antes de qualquer exercício de opções (será visto que isso ocorre quando Y está abaixo do *gatilho do líder* Y_L), o valor de cada firma é o corrente fluxo de caixa da firma em *perpetuidade*, $Y D(0, 0) / (r - \alpha)$, com $r > \alpha$, *mais o valor da opção de investimento* (exercendo como líder ou como seguidor, cada um com 50% de chances, como será visto depois) líquido de perdas competitivas devido a externalidade negativa da entrada esperada do rival.

Como é padrão em *jogos de momento ótimo*, a solução é feita em retro-*indução* (“backwards”). Isso significa que primeiro é necessário estimar o valor do seguidor (dado que o líder entrou antes) e então calcular o valor do líder, dado que o líder sabe que uma entrada ótima do seguidor poderá ocorrer no futuro. Aqui se considera que qualquer firma pode se tornar a líder (os papéis *não* são atribuídos de forma exógena). Será visto as duas maneiras mencionadas de se estimar o valor do seguidor. Primeiro, usando o método diferencial, com os passos tradicionais do método dos ativos contingentes (Lema de Itô, etc., ver cap. 2), o valor do seguidor F é dado pela equação diferencial ordinária (EDO) a seguir.

$$0,5 \sigma^2 Y^2 F_{YY} + \alpha Y F_Y - r F + Y D(0, 1) = 0 \quad (273)$$

Onde os primeiros três termos correspondem à parte homogênea da EDO e o último termo no lado direito da eq. (273) é o termo não-homogêneo, também chamado de “fluxo de caixa”, pois ele é o fluxo de lucro do seguidor antes do exercício da opção. Note que esse termo de fluxo de caixa não existe no modelo de “novo mercado” do Dixit & Pindyck, enquanto que em Huisman & Kort o seguidor ganha um fluxo de caixa mesmo antes da sua opção (de expansão) ser exercida. A solução da EDO é a soma de uma parcela (solução) homogênea do tipo $A Y^{\beta_1} + B Y^{\beta_2}$, mais uma *solução particular*. Os parâmetros $\beta_{1,2}$ são as raízes da equação quadrática $0,5 \sigma^2 \beta^2 + (\alpha - 0,5 \sigma^2) \beta - r = 0$ (ver Dixit & Pindyck, cap.5). A lógica econômica impõe que a constante B no termo da raiz *negativa* (β_2) seja igual a zero³²³. Logo, a solução da EDO, eq. (273), do seguidor é:

$$F(Y) = A Y^{\beta_1} + Y D(0, 1) / (r - \alpha) \quad , \quad \text{se } Y \leq Y_F \quad (274a)$$

$$F(Y) = Y D(1, 1) / (r - \alpha) - I \quad , \quad \text{se } Y \geq Y_F \quad (274b)$$

³²³ Pois quando (a demanda) Y tende a zero, o valor do seguidor precisa ir a zero também.

Onde Y_F é o gatilho do seguidor para o investimento ótimo. É necessário determinar duas incógnitas, a constante A e o gatilho Y_F . Para isso, é necessário aplicar as conhecidas (ver cap. 2 ou Dixit & Pindyck) condições de contorno de *continuidade* e de *contato suave*:

$$F(Y = Y_F) = Y_F D(1, 1) / (r - \alpha) - I \quad (275)$$

$$F_Y(Y = Y_F) = D(1, 1) / (r - \alpha) \quad (276)$$

Com o subscrito Y na eq. (275) denotando a primeira derivada em relação a Y . Derivando a eq. (274a) em $Y = Y_F$ e igualando à eq. (276); assim como igualando a eq. (274a) em $Y = Y_F$ à eq. (275), se obtém duas equações e duas incógnitas (A e Y_F). Com um pouco de álgebra se chega aos seguintes valores:

$$A = \frac{Y_F^{1-\beta_1}}{\beta_1} \frac{D(1, 1) - D(0, 1)}{(r - \alpha)} \quad (277)$$

$$Y_F = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(r - \alpha) I}{D(1, 1) - D(0, 1)} \quad (278)$$

Substituindo a constante A (eq. 277) na eq. (274a), se chega ao valor do seguidor obtido por Huisman & Kort. A eq. (278) dá o gatilho do seguidor.

O segundo caminho para achar o valor do seguidor e seu gatilho é o método integral, que é baseado no conceito de *tempo de parada* ou *tempo do primeiro toque* (“first hitting time”) e no conceito de *fator de desconto esperado* (“expected discount factor”). Seja T^* o primeiro instante que a variável estocástica toca o valor Y^* (nesse caso $Y^* = Y_F$). O valor do seguidor tem dois componentes. Primeiro o fluxo de lucro antes do exercício da opção (lembrar que aqui ambas as firmas são ativas no mercado mesmo antes de exercerem as suas opções), de $t = 0$ até $t = T^*$ (ou T_F). Segundo, o fluxo de lucro depois do exercício da opção em Y_F , líquido do investimento I , de $t = T^* = T_F$ até infinito. Esse valor é dado pelas integrais abaixo³²⁴:

$$F(Y) = \underbrace{E \left[\int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) D(0, 1) dt \right]}_{\text{Lucro esperado antes do exercício}} + \underbrace{E \left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt} Y(t) D(1, 1) dt \right]}_{\text{Lucro esperado depois do exercício}} - E \left[e^{-rT^*} \right] I \quad (279)$$

³²⁴ Note que o *valor do seguidor* assume que a outra firma entrou em $t = 0$. Se em vez disso se quer o valor *da firma* planejando ser seguidora, assumindo que a outra firma entrará como líder em $T_L > 0$, então três integrais seriam necessárias: uma de 0 a T_L , com $D(0, 0)$; outra de T_F a T_L , com $D(0, 1)$ e a última de T_F para infinito, com $D(1, 1)$.

Note que para o modelo de *novo mercado* $D(0, 1) = 0$ e a primeira integral é zero (caso do Dixit & Pindyck). Em $t = T^*$ a firma obtém um fluxo de lucro em perpetuidade com valor presente em T^* de $Y_F D(1, 1)/(r - \alpha)$. Trazendo para valor presente, de T^* ao instante corrente ($t = 0$), se obtém:

$$F(Y) = D(0, 1) \mathbf{E} \left[\int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) dt \right] + \mathbf{E} \left[e^{-rT^*} \right] \left[\frac{Y_F D(1, 1)}{r - \alpha} - I \right] \quad (280)$$

O *valor esperado do fator de desconto estocástico* depende só dos parâmetros do processo estocástico e da taxa de desconto r . Esse fator é dado pela equação simples abaixo para o tempo aleatório T^* em que uma variável Y atinge um gatilho simples Y^* :

$$\mathbf{E} \left[e^{-rT^*} \right] = \left(\frac{Y}{Y^*} \right)^{\beta_1} \quad (281)$$

Para a prova, ver o apêndice 9.3. O valor do primeiro valor esperado da eq. (280) é dado por:

$$\mathbf{E} \left[\int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) dt \right] = \frac{Y}{r - \alpha} \left[1 - \left(\frac{Y}{Y^*} \right)^{\beta_1 - 1} \right] \quad (282)$$

Para a prova desse valor esperado, ver também o apêndice 9.3³²⁵. Substituindo as eqs. (281) e (282) na eq. (280), pode-se verificar que o resultado encontrado para o seguidor é o mesmo do obtido com o primeiro método, i. é, as eqs. (274a, b) com as eq. (277). Para o caso mais comum de modelo de mercado novo, esse segundo método é mais fácil porque a equação do fator de desconto esperado é fácil de lembrar e a primeira integral é zero.

Entretanto, como calcular o valor do *gatilho* com o segundo método? Será apresentado um método simples usando uma abordagem de *otimização padrão* para a decisão de investimento (para detalhes desse método, ver Dixit & Pindyck & Sødal, 1999).

Seja o *valor presente líquido* do exercício da opção ser $VPL_F = V(Y) - I$. A maximização do valor do projeto é balanço (“trade-off”) entre a espera por um valor maior do projeto $V(Y)$ e o fator de desconto (maior, quanto mais cedo a

³²⁵ Apesar dessas provas serem apresentadas em Dixit & Pindyck (chapter 9, appendix), a prova aqui mostra alguns passos intermediários não apresentados naquele livro texto.

opção for exercida). Em caso de espera por um valor demasiadamente alto de $V(Y)$, se pode esperar demasiadamente e o fator de desconto ficaria muito pequeno. Logo, nesse balanço do custo-benefício da política de espera, existe um valor ótimo para Y que maximiza o valor presente do VPL esperado obtido com o exercício da opção, i. é, a função $G(Y)$ abaixo:

$$G(Y) = \underset{Y}{\text{Max}} E [e^{-r t}] \cdot [V(Y) - I] \quad (283)$$

O benefício do exercício da opção é $V(Y) = Y [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha)$. Denote o fator de desconto esperado por $R(Y_0, Y_F)$, i. é (para simplicidade de notação, faça $Y_0 = Y$):

$$R(Y, Y_F) = E[\exp(-r T^*)] = (Y/Y_F)^{\beta_1} \quad (284)$$

Logo, o problema de maximização da eq. (283) se torna:

$$G(Y) = \text{Max}\{ R(Y, Y_F) \cdot (\{ Y [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha) \} - I) \} \quad (285)$$

A condição de primeira ordem para maximizar a eq. (285) determina que se tome a derivada parcial de G em relação à variável de controle estocástico Y_F e iguale a zero. Assim, se obtém:

$$\begin{aligned} R(Y, Y_F) \cdot [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha) + R_{Y_F}(Y, Y_F) \cdot Y_F [D(1, 1) - D(0, 1)] / (r - \alpha) \\ = R_{Y_F}(Y, Y_F) \cdot I \end{aligned} \quad (286)$$

O valor da derivada do fator de desconto esperado em relação a Y_F é:

$$R_{Y_F}(Y, Y_F) = -\beta_1 Y^{\beta_1} / [Y_F^{(\beta_1 + 1)}] \quad (287)$$

Substituindo as eqs. (287) e (284) na eq. (286), rapidamente se conclui que a equação resultante para o gatilho é a mesma obtida com o primeiro método, i. é, a eq. (278). Como antes, esse segundo método (integral) parece mais simples para o caso de novo mercado, mas não tinha sido usado antes para resolver esse jogo de OR.

Para o valor do líder $L(Y)$ se pode também aplicar qualquer um dos dois métodos. Por exemplo, o valor do líder é dado pela soma das integrais líquida do custo de investimento I :

$$\begin{aligned} L(Y) = E \left[\int_0^{T^*} e^{-rt} Y(t) D(1, 0) dt \right] + E \left[\int_{T^*}^{+\infty} e^{-rt} Y(t) D(1, 1) dt \right] - I \\ \text{Lucro esperado na fase de monopólio} \quad \text{Lucro esperado na fase de duopólio} \end{aligned} \quad (288)$$

Ou seja, entrando como líder a firma experimenta uma fase como monopolista com fluxo de lucro $Y D(1, 0)$ e, quando o seguidor entra (em $t = T^* =$

T_F), o fluxo de lucro cai para $Y D(1, 1)$. Pode-se seguir os passos do caso do valor do seguidor (segundo método) para calcular o valor do líder. Entretanto, talvez seja mais fácil aqui o primeiro método, i. é, o método da equação diferencial para o valor do líder durante a fase de monopólio³²⁶, denotado por $V(Y) = L(Y) + I$. Esse valor $V(Y)$ precisa ser igual (continuidade) ao valor do investimento simultâneo (valor do seguidor) no ponto da condição de contorno em $Y = Y_F$. A equação diferencial para $V(Y)$ é dada por:

$$0,5 \sigma^2 Y^2 V_{YY} + \alpha Y V_Y - r V + Y D(1, 0) = 0 \quad (289)$$

O último termo (parte não-homogênea) é o fluxo de caixa representado pelo fluxo de lucro durante a *fase monopolista*. Outra vez, a solução da EDO é dada pela soma da solução geral (da parte homogênea) mais a solução particular relacionada ao fluxo de caixa.

$$v(Y) = B Y^{\beta_1} + \frac{Y D(1, 0)}{r - \alpha} \quad (290)$$

A constante B é o parâmetro a ser calculado, requerendo apenas uma condição para isso. A maior diferença comparada com a constante A (eq. 277) do valor do seguidor é que a constante B é negativa, refletindo no valor (esperado) do líder, as perdas devido ao possível futuro exercício da opção de investimento do seguidor. Isso é mostrado matematicamente abaixo. A condição de contorno relevante aqui é a condição de continuidade (“value-matching”) no ponto que o seguidor entra (em Y_F). A condição de suavidade não é aplicável aqui, pois esse ponto não é derivado do controle ótimo do líder, ele é derivado de um problema de otimização, mas do *outro* jogador. Essa condição de contorno é:

$$V(Y_F) = Y_F D(1, 1) / (r - \alpha) \quad (291)$$

O valor do líder durante a fase monopolista é igual ao valor do investimento simultâneo em Y_F . Igualando as eqs. (290) e (291), se obtém o valor da constante B em função de Y_F .

$$B = \frac{Y_F [D(1, 1) - D(1, 0)]}{Y_F^{\beta_1} (r - \alpha)} \quad (292)$$

Note que o valor da constante é negativo pois $D(1, 1) < D(1, 0)$. Isso significa que o efeito da entrada do seguidor é diminuir o valor do líder, como era

³²⁶ O “truque” é trabalhar a EDO de $V(Y)$ e não de $L(Y)$ ou da opção de ser líder.

de se esperar pela intuição econômica nesse duopólio. O valor negativo da constante significa que a função valor do líder é côncava.

O valor do líder na fase de monopólio $V(Y)$ é obtido substituindo a constante (eq. 292) na eq. (290) do valor do líder. Com $V(Y)$, se pode descobrir o *valor de estar se tornando líder*, $L = V - I$, que para $Y < Y_F$ é dado por:

$$L(Y) = \frac{Y D(1, 0)}{r - \alpha} + \left(\frac{Y}{Y_F}\right)^{\beta_1} \frac{Y_F [D(1, 1) - D(1, 0)]}{r - \alpha} - I \quad (293)$$

Pode-se verificar que esse valor é o mesmo que poderia ser obtido usando o (segundo) método baseado no valor esperado das integrais. Se $Y \geq Y_F$, o valor de estar se tornando líder é igual ao o valor de estar se tornando seguidor que é igual ao valor do exercício simultâneo $S(Y)$:

$$L(Y) = S(Y) = \frac{Y D(1, 1)}{r - \alpha} - I \quad (294)$$

O valor do exercício (investimento) simultâneo é também importante porque é necessário responder questões fundamentais tais como: (a) o que ocorre se uma firma desviar da estratégia de seguidora, investindo? e (b) uma firma quer se tornar líder, mas o que ocorre se o rival tem a mesma idéia ao mesmo tempo e ambos investem simultaneamente? Em outras palavras, é necessário verificar se a estratégia de seguidor é EN e o valor esperado (ou perdas esperadas) se por “erro” ambos investem ao mesmo tempo. Isso será útil para o cálculo do equilíbrio em estratégias mistas. Note que o investimento simultâneo pode ser ótimo para ambos os jogadores se o estado da demanda for tão alto que $Y \geq Y_F$, mas é um erro no caso da demanda ser tal que $Y < Y_F$.

Só falta agora calcular o gatilho do líder. Sem a ameaça de preempção, a firma irá investir otimamente no gatilho do monopolista Y_M . Entretanto, devido à ameaça de preempção, as firmas não podem esperar tanto para investir. Se uma firma esperar até $Y = Y_M$, a outra firma pode investir em $Y_M - \varepsilon$, mas a primeira firma poderia se antecipar ao rival investindo antes, em $Y = Y_M - 2\varepsilon$, etc. Esse processo pára quando uma firma não tem mais incentivo para se antecipar ao rival. A firma 1 tem incentivo para se tornar líder se $L_1 > F_1$ e, mais importante para a decisão da firma 1, a firma 1 sabe que a rival tem também o incentivo para se tornar líder quando $L_2 > F_2$. Assim, a estratégia da firma 1 para se tornar líder é investir quando $L_2 = F_2$. No entanto, devido à simetria do problema, $L_1 = L_2$ e $F_1 =$

F_2 para todo Y , e assim o líder do gatilho é definido como sendo o Y no intervalo $0 < Y < Y_F$ tal que os valores do líder e do seguidor são iguais, i. é:

$$Y_L := \{ 0 < Y < Y_F \mid L(Y) = F(Y) \} \quad (295)$$

O qual pode ser calculado facilmente com um algoritmo simples, dada as curvas dos valores do líder e seguidor em função da demanda Y .

Existe uma proposição em Huisman & Kort mostrando que o gatilho do líder Y_L é *único*. Devido à simetria, esse gatilho é igual para as duas firmas.

A Figura 60 mostra os valores do líder e do seguidor, além das entradas ótimas como líder e como seguidor. Os dados de entrada são os mesmos usados por Huisman & Kort (1999), i. é, o caso base é dado por: $\alpha = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $r = 10\%$, $Y(t = 0) = 1$, $I = 20$ (para cada firma) e os fatores determinísticos da demanda são $D(0, 1) = 1$, $D(0, 0) = 2$, $D(1, 1) = 2.5$ e $D(1, 0) = 4$.

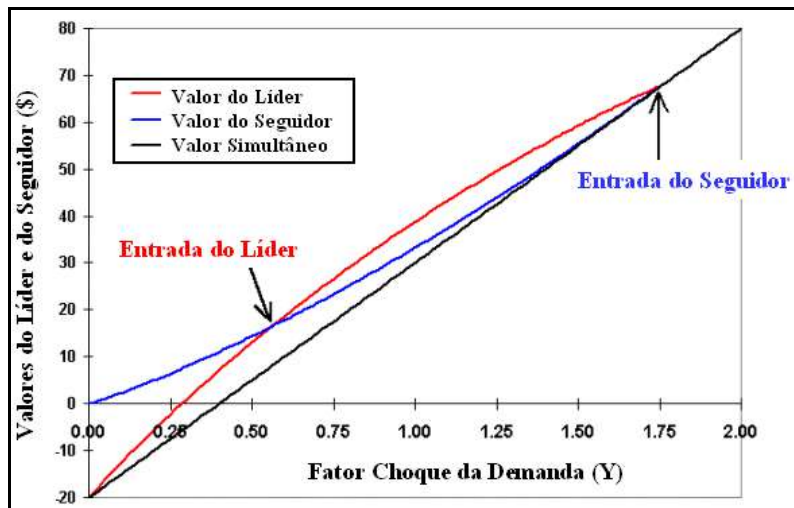


Figura 60 – Entradas do Líder e Seguidor no Duopólio Simétrico

Outra extensão interessante de Huisman & Kort é que eles consideraram a possibilidade de equilíbrios de colusão sem um contrato efetivo (formal) entre as firmas, i. é, sem comunicação entre os jogadores. Eles analisaram em que medida uma política tácita de “esperar e ver” pode ser equilíbrio. Firmas poderiam calcular se “esperar e ver” é a melhor estratégia (ou não) até o nível de gatilho de colusão $Y = Y_C$, quando ambas investiriam simultaneamente (ou uma firma investiria e a outra investiria *imediatamente* após).

Colusão tácita (ou não forçada, ou informal) será um EN somente se não existir incentivo para desviar dessa estratégia. Desvio aqui significa ganhar o lucro do líder com a outra escolhendo investir mais tarde como seguidora. Denotando o valor em colusão de cada firma por $C(Y, Y_C)$, a colusão será ENPS

somente se $C(Y, Y_C) \geq L(Y)$ para, pelo menos, todos os Y no intervalo $(0, Y_F)$. Se isso ocorre, existem infinitas possibilidades de colusão como EN. Desses equilíbrios, o que é Pareto ótimo é investir no gatilho de colusão Y_C dado por:

$$Y_C = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(r - \alpha) I}{D(1, 1) - D(0, 0)} \quad (296)$$

A Figura 61 apresenta os valores do líder, seguidor e *em colusão* como funções do choque estocástico da demanda Y . Os parâmetros usados foram os mesmos da Figura 60. Note que o valor em colusão é sempre maior do que o valor do líder, de forma que o equilíbrio em colusão é factível (as firmas em colusão não têm incentivos de desvio). Para os dados de entrada do caso base, a curva do valor da colusão tem um *contato suave* na linha de valor de exercício simultâneo em $Y_C = 5,29$, um valor muito alto que está fora do gráfico.

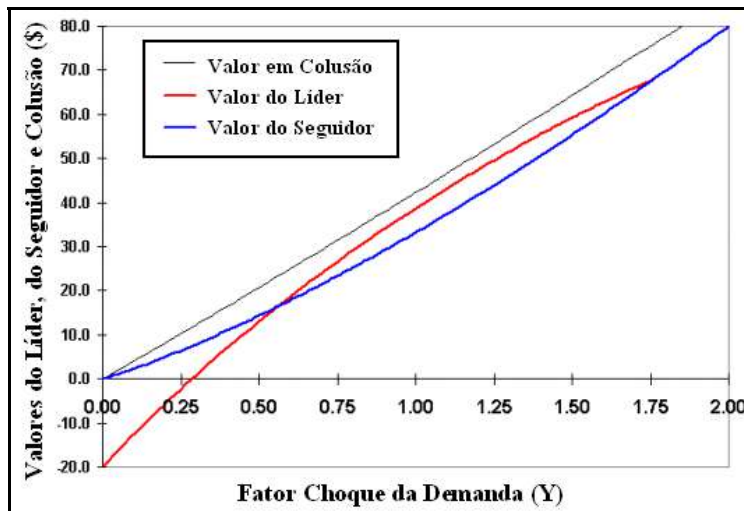


Figura 61 – Valor em Colusão como Estratégia Dominante

Se a *vantagem de ser líder* for *suficientemente grande*, a colusão pode ser destruída por preempção de uma das firmas. A Figura 62 ilustra esse ponto, quando se eleva essa vantagem de ser líder fazendo $D(1, 0) = 5$.

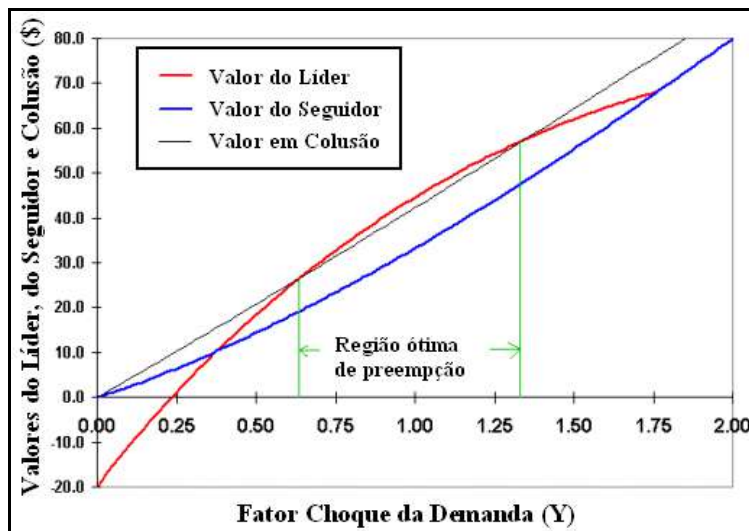


Figura 62 – Região de Preempção Destruindo a Colusão

Na Figura 62 existe uma região onde a preempção é ótima devido ao maior valor para o papel de líder quando comparado com o valor em colusão. Logo, nesse caso as firmas em colusão têm incentivo para trair e assim a colusão nesse caso não é ENPS. Além disso, conforme apontam Huisman & Kort (1999), no modelo de “novo mercado” a colusão tácita nunca é EN.

Agora imagine que o estado inicial da demanda está entre Y_L e Y_F . Ambas as firmas têm incentivo para se tornar líder pois $L > F$ (ver a Figura 60 para ficar claro). Não há lógica em imaginar que, sem qualquer comunicação, uma firma irá deixar a outra firma se tornar líder, i. é, não há lógica em imaginar que a probabilidade de investimento simultâneo seja zero. Ambas as firmas irão desejar ter o lucro do líder, mas ambas as firmas têm medo da possibilidade de ficar pior com o investimento simultâneo (um “equivoco”), já que o valor do investimento simultâneo é o menor valor (seria melhor até ser o seguidor). Assumindo que não existe comunicação entre os jogadores, o único caminho racional para tratar esse problema na teoria dos jogos é permitindo *estratégias mistas*³²⁷.

Com estratégias mistas as firmas irão racionalmente calcular a probabilidade ótima de exercer a opção de investimento visando o valor do líder, mas considerando a probabilidade positiva de investimento simultâneo. As firmas irão jogar um *jogo simultâneo* (possivelmente com infinitas rodadas) onde a firma i

³²⁷ Quando a comunicação é permitida, como sugerido em Joaquin & Buttlar (2000), existe a alternativa do jogo de barganha para dividir a diferença $L - F$ com a concordância de que apenas uma das companhias se tornaria a líder, evitando o equivoco do exercício simultâneo. Entretanto, nessa aplicação o acordo é ilegal, já que o preço ao consumidor é elevado (ou deixa de cair).

pode escolher investir com probabilidade p_i e não investir com probabilidade igual a $1 - p_i$; jogadores $i = 1$ ou 2 .

A análise de estratégias mistas em tempo contínuo deve ser feita com cuidado e usando ferramentas especiais. A passagem de tempo discreto para tempo contínuo apresenta problemas quando se usa a consideração tradicional de limite. Fudenberg & Tirole (1985) reportou que os métodos usuais apresentam “perda de informação” nessa passagem, com o caso contínuo não representando o limite do caso discreto. Em adição, com as ferramentas tradicionais, várias estratégias convergem com probabilidade 1 para serem jogadas no instante $t = 0$, um resultado não-consistente.

Para determinar as estratégias mistas simétricas, Huisman & Kort usaram a mesma ferramenta usada em Fudenberg & Tirole (1985): eles especificaram “probabilidades” chamadas de “átomos” $p(\tau)$ que, se positivo, indicam que a *probabilidade acumulada de exercício* $G_i(\tau)$ é igual a 1. Logo, τ é definido como o primeiro instante que algum jogador exercerá a opção, dado que ninguém exerceu antes. Esse tipo de recurso é tomado da literatura de *controle ótimo estocástico* (ver, por ex., Birge & Louveaux, 1997, p.289).

A idéia fundamental é que *controle não toma tempo*. Usando essa analogia, o controle aqui é o resultado de um jogo simultâneo que pode ser repetido. Isso é como um otimizador automático instantâneo. Dessa forma, o jogo simultâneo com dois jogadores, *mesmo se repetido infinitas vezes*, é jogado *instantaneamente* (não há consumo de tempo). Esse método determinará as probabilidades das estratégias mistas e, segundo Huisman & Kort, pode ser provado que é o verdadeiro limite do jogo equivalente em tempo discreto.

O jogo simultâneo, o qual pode ser repetido infinitas vezes, exatamente no instante em que um (ou ambos) jogador exercerá a opção (i.é, em $t = \tau$), é mostrado na forma estratégica (normal) na Figura 63, junto com as probabilidades de exercício das opções.

		Firma 2	
		$p_2(\tau)$	$1 - p_2(\tau)$
Firma 1	$p_1(\tau)$	$S(Y(t))$, $S(Y(t))$	$L(Y(t))$, $F(Y(t))$
	$1 - p_1(\tau)$	$F(Y(t))$, $L(Y(t))$	Repete o jogo

Figura 63 – Jogo Simultâneo em $t = \tau$

O valor da firma 1, V_1 (ainda não otimizado) é dado por:

$$V_1 = p_1 p_2 S + p_1 (1 - p_2) L + (1 - p_1) p_2 F + (1 - p_1) (1 - p_2) V_1 \quad (297)$$

O último termo significa que em caso de repetição, se obtém o valor V_1 devido à definição de τ : quando esse jogo é jogado (em τ , com talvez infinitas rodadas) é certo que algum jogador (ou ambos) exercerão a opção. Uma forma alternativa e equivalente (talvez mais intuitiva) de obter V_1 é dada abaixo:

$$V_1 = [p_1 p_2 S + p_1 (1 - p_2) L + (1 - p_1) p_2 F] \cdot [1 + (1 - p_1) (1 - p_2) + (1 - p_1)^2 (1 - p_2)^2 + \dots] \quad (298)$$

O somatório entre os primeiros colchetes é o valor esperado obtido numa rodada em caso de definição nessa rodada (investimento de um ou dois jogadores). O segundo somatório entre colchetes é multiplicado pelo valor esperado, considerando o caso de definição na primeira rodada (multiplicando por um), na segunda rodada [multiplicando por $(1 - p_1) (1 - p_2)$] e etc., até infinito. O somatório do segundo colchetes é simplesmente a soma infinita (convergente) de uma progressão geométrica, de forma que é fácil de calcular. Logo, a equação para o valor (não otimizado) do jogo simultâneo para a firma i , V_i , $i = 1$ ou 2 , é:

$$V_i = \frac{p_i p_j S + p_i (1 - p_j) L + (1 - p_i) p_j F}{1 - [(1 - p_i) (1 - p_j)]} \quad (299)$$

Agora os jogadores irão calcular as probabilidades ótimas para exercício da opção, i. é, a probabilidade que maximiza o valor esperado V_i . A condição de primeira ordem para esse problema de otimização é $\partial V_1 / \partial p_1 = 0$, para a firma 1, dado que o rival está planejando exercer a opção com probabilidade p_2 . A condição de segunda ordem indica que esse problema é de maximização. Note também que, devido à simetria do problema, as probabilidades ótimas devem ser iguais, i. é, $p_1 = p_2 = p^*$. Isso permite uma simplificação adicional. Usando a condição de primeira ordem e a propriedade de simetria, depois de alguma álgebra se obtém a seguinte equação simples para a probabilidade ótima de investir em estratégias mistas:

$$p^* = \frac{L - F}{L - S} \quad (300)$$

A Figura 64 dá uma *interpretação geométrica* para a probabilidade ótima de exercício p^* em estratégias mistas. Pense as curvas como os valores do outro jogador, embora nesse caso simétrico os valores dos dois jogadores sejam iguais.

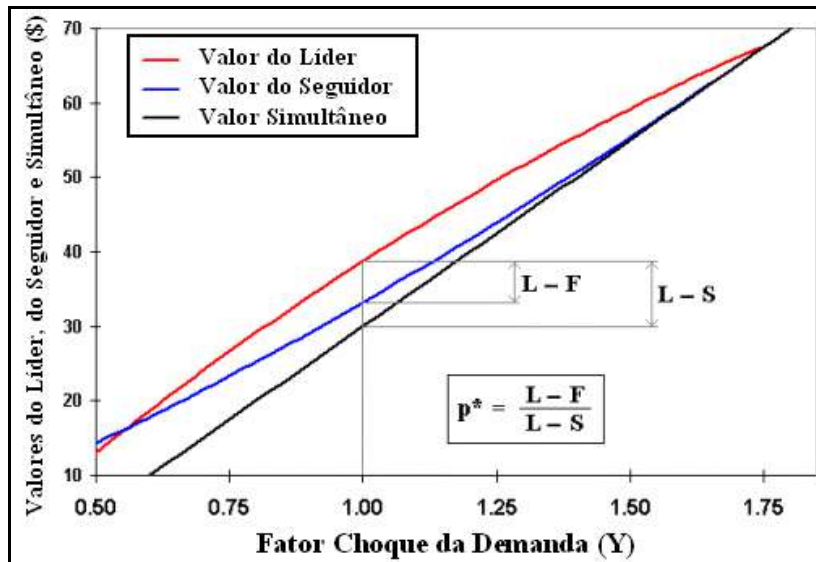


Figura 64 – Interpretação Geométrica da Probabilidade em Estratégias Mistas

Na Figura 64 é fácil ver que quando $L = F$ e $L > S$, se tem $p^* = 0$. Quando L tende para F (e S), se o limite $p^* = 1$. No equilíbrio em estratégias mistas, a probabilidade p^* pode ser interpretada como sendo igual à razão entre o benefício advindo da preempção ($L - F$) e o intervalo de variação total possível ($L - S$). Note que $L - S = [(L - F) + (F - S)]$.

Para concluir esse exemplo, será calculada a *probabilidade de somente uma das firmas exercer* a opção e também a *probabilidade de exercício simultâneo* da opção. Para isso, considere de novo o jogo simultâneo na forma estratégica da Figura 63. Usando um raciocínio similar ao usado para calcular os valores (eq. 297 ou a eq. 298), se pode escrever que a probabilidade $\Pr(\text{um} = i)$ que somente a firma i estará investindo em τ é dada por:

$$\Pr(\text{um} = i) = p(\tau)(1 - p(\tau)) + (1 - p(\tau)) \cdot (1 - p(\tau)) \cdot \Pr(\text{um} = i) \quad (301)$$

Logo, a probabilidade $\Pr(\text{um} = i)$ é dada por:

$$\Pr(\text{um} = i) = \frac{1 - p(\tau)}{2 - p(\tau)} \quad (302)$$

Naturalmente, a probabilidade $\Pr(\text{um} = j)$ de somente a firma j investir nesse jogo simultâneo em τ é exatamente a mesma devido a simetria. Já a *probabilidade de exercício simultâneo* (ou probabilidade de “equivoco”, se $Y < Y_F$), denotado por $\Pr(\text{dois})$, usando um raciocínio similar, é dada por:

$$\Pr(\text{dois}) = \frac{p(\tau)}{2 - p(\tau)} \quad (303)$$

Note que as três probabilidades somam um, i. é, $\Pr(\text{um} = i) + \Pr(\text{um} = j) + \Pr(\text{dois}) = 1$. Isso é por causa de que não existe possibilidade de não haver exercício nesse jogo simultâneo, devido a definição de τ . Agora pode-se usar o valor ótimo achado para a probabilidade $p(\tau)$, eq. (300), para estimar as probabilidades de cada firma investir sozinha e a probabilidade de investimento simultâneo. Por ex., em Y_L se sabe que $L = F$ e $L > S$. Logo, $p(\tau) = 0$. Nesse caso, $\Pr(\text{dois}) = 0$ e $\Pr(\text{um} = i) = \Pr(\text{um} = j) = \frac{1}{2}$. Note também que $\Pr(\text{dois})$ é consistente com os limites quando Y tende para Y_F ou Y_L , respectivamente 1 e 0.

Portanto, quando o mercado começa com $Y < Y_L$ (demanda ainda incipiente) existem 50% de chances de cada firma se tornar a líder e probabilidade zero de “equivoco” quando Y alcançar Y_L . Essa conclusão de Dixit & Pindyck (1994, cap. 9) sobre as estratégias mistas nesse jogo é correta somente nesse caso. Caso a demanda comece aquecida, de forma que $Y(t = 0) \in (Y_L, Y_F)$, então existirá uma probabilidade estritamente positiva de “equivoco” (exercício simultâneo indesejável).

4.2.3. Duopólio Sob Incerteza Assimétrico

O modelo assimétrico para o duopólio é uma hipótese mais realista na maioria das indústrias. Aqui as firmas são não-homogêneas já que, para o mesmo investimento, uma firma tem *menor custo operacional* do que a outra. Isso significa que uma firma tem vantagem competitiva sobre a rival. No exemplo da indústria do petróleo, com duas firmas que disputam uma área geográfica para distribuição de derivados de petróleo, uma firma pode ter menor custo operacional por trabalhar numa escala maior que a rival, de forma que os custos fixos são mais diluídos devido à escala. Ou pode-se pensar que a refinaria de uma firma é mais moderna e tem menores custos operacionais do que a outra. Assim, esse tópico pode ser útil em várias aplicações da indústria de petróleo (mas não apenas).

Aqui é sumarizado e estendido o conhecido modelo de Joaquin & Buttler (2000)³²⁸. Seguindo esses autores, é assumida a *função demanda inversa linear*, com as quantidades determinadas pela competição de Cournot. Ambas as firmas são baseadas no mesmo país e ambas estão considerando um investimento no

³²⁸ Esse item, assim como o anterior, é baseado no artigo de Dias & Teixeira (2003).

mesmo país vizinho. A função demanda em Joaquin & Buttler é *determinística* e constante ao longo do tempo. Entretanto, a taxa de câmbio $X(t)$ é incerta e evolui segundo um processo estocástico modelado como MGB (ver cap. 2), com parâmetros do processo livre de risco igual a δ (taxa de dividendos), σ (volatilidade) e taxa livre de risco r . Em termos matemáticos, isso é equivalente a considerar um choque estocástico multiplicativo $Y(t)$, como antes³²⁹. A função demanda inversa linear determinística é:

$$P = a - b Q_T, \text{ com } a > 0, b > 0, a > b Q_T \quad (304)$$

Onde $P(Q_T)$ é o preço do produto *em moeda estrangeira*, o qual é função da produção (oferta) total nesse mercado Q_T . Para o preço *em moeda local*, basta multiplicar a eq. (304) pela taxa de câmbio $X(t)$.

No caso de exercício da opção de investimento, existe um *custo operacional variável* c_i para a firma i , onde i pode ser "l" ou "h", para as firmas de baixo custo ("low-cost") e de alto custo ("high-cost"), respectivamente. A vantagem competitiva da firma de baixo custo é expressa pela inequação $c_l < c_h$. A função *fluxo de lucro* $\pi_i(Q_i)$ para a firma i *em moeda estrangeira* é:

$$\pi_i(Q_i) = Q_i [a - b Q_T - c_i] \quad (305)$$

Usando o método dos ativos contingentes e considerando que a taxa de dividendos $\delta > 0$ é interpretada como a *taxa de juros em moeda estrangeira*, o *valor presente* de um fluxo *perpétuo* de lucro é dado pela divisão da eq. (305) por δ . O fluxo de lucro ótimo do monopolista e os fluxos de lucro em equilíbrio do duopólio de Cournot são, respectivamente:

$$\pi_{M_i} = \frac{(a - c_i)^2}{4b} \quad (306)$$

$$\pi_l = \frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9b} \quad \Bigg| \quad \pi_h = \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b} \quad (307)$$

Aqui serão colocados diretamente os resultados³³⁰, os quais podem ser obtidos com qualquer um dos dois métodos apresentados antes, sendo que aqui o modelo é de "novo mercado" (facilitando os cálculos). O valor de seguidor para a firma de alto custo é $F_h(X)$, que exerce sua opção como seguidora no gatilho $X^*_{F_h}$,

³²⁹ A extensão para o caso de demanda estocástica, mas sem taxa de câmbio estocástica, é bastante direta.

³³⁰ Ver <http://www.puc-rio.br/marco.ind/duopoly3.html> para detalhes e discussão adicional.

é dado pela equação abaixo (para o caso menos provável da firma de baixo custo como seguidora, basta inverter “l” e “h”).

$$F_h(X) = \begin{cases} \left[\frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b} \frac{X_{Fh}^*}{\delta} - I \right] \left(\frac{X}{X_{Fh}^*} \right)^{\beta_1} & , \text{ se } X < X_{Fh}^* \\ \frac{(a - 2c_h + c_l)^2}{9b} \frac{X}{\delta} - I & , \text{ se } X \geq X_{Fh}^* \end{cases} \quad (308)$$

Onde β_1 é a raiz positiva ($e > 1$) da equação quadrática $0,5 \sigma^2 \beta^2 + (r - \delta - 0,5 \sigma^2) \beta - r = 0$. O formato da equação do valor do seguidor quando a taxa de câmbio é menor do que o gatilho, tem uma interpretação natural. O primeiro termo (entre colchetes) é o VPL do exercício da opção em X_{Fh}^* . O segundo termo (multiplicativo) é o valor esperado do fator de desconto estocástico, ver a eq. (281), para o tempo aleatório de exercício do seguidor T_{Fh}^* . A segunda linha da eq. (308) é também o valor de exercício simultâneo para qualquer X (mas para o caso de $X < X_{Fh}^*$, esse seria o valor de “equivoco”).

O gatilho para a firma de alto custo como seguidora é:

$$X_{Fh}^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{9b \delta I}{(a - 2c_h + c_l)^2} \quad (309)$$

O valor do líder para a firma de baixo custo L_1 (de novo, para o caso menos provável da firma de alto custo ser a líder, basta permutar “l” e “h”), se $X < X_{Fh}^*$, é dado pela equação abaixo:

$$L_1 = \frac{(a - c_l)^2}{4b} \frac{X}{\delta} + \left[\frac{(a - 2c_l + c_h)^2}{9b} - \frac{(a - c_l)^2}{4b} \right] \frac{X_{Fh}^*}{\delta} \left(\frac{X}{X_{Fh}^*} \right)^{\beta_1} - I \quad (310)$$

O formato da eq. (310) também permite uma explanação intuitiva. O primeiro termo do lado direito é o lucro de monopólio em perpetuidade da firma líder. O termo do meio é o valor presente esperado das perdas competitivas (i. é, o termo entre colchetes é negativo), o qual ocorre a partir da entrada do seguidor (diminuindo o lucro de monopólio em perpetuidade). O último termo é o investimento requerido para exercer a opção. Se $X \geq X_{Fh}^*$, o valor do líder é igual ao valor de investimento *simultâneo*.

Para obter o valor do líder, foi achada a *mesma* constante A_i usada em Joaquin & Buttler (eq.16.6e), mas num formato mais heurístico que permite uma rápida extensão para outras curvas de demanda, é mostrada a seguir.

$$A_1 = \left[\frac{(a - 2c_1 + c_h)^2}{9b} - \frac{(a - c_1)^2}{4b} \right] \frac{(X_{Fh}^*)^{1-\beta_1}}{\delta} \quad (311)$$

Pode-se identificar no termo entre colchetes um formato de diferença de fluxos de lucro: o fluxo de lucro do duopólio menos o fluxo de lucro do monopólio. Dessa forma é fácil concluir que essa constante é negativa, já que o fluxo de lucro na fase de duopólio é menor do que na fase de monopólio. O valor negativo da constante significa que a função valor do líder é côncava, refletindo o efeito da entrada futura do seguidor que diminui o valor do líder, como esperado pela intuição. A Figura 65 mostra os valores do líder, do seguidor e de investimento simultâneo, para os mesmos dados de entrada usados no exemplo original de Joaquin & Buttlar.

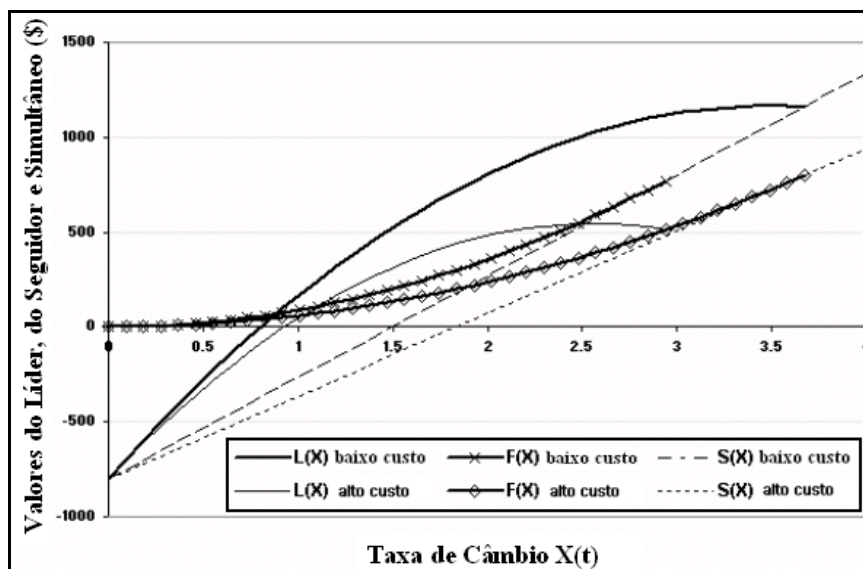


Figura 65 – Valores do Líder, Seguidor e Simultâneo em Duopólio Assimétrico

Como estimar o gatilho do líder? A resposta precisa de algumas considerações adicionais quando comparada com o caso simétrico do item 4.2.2. Sem a ameaça de preempção, a firma de baixo custo iria investir otimamente no gatilho monopolista X_{MI} . Entretanto, devido à ameaça de preempção, as firmas não podem esperar tanto tempo para investir. Se uma firma espera até $X = X_M$, em alguns casos a outra firma pode se antecipar investindo em $X_M - \varepsilon$, etc. Esse processo termina quando uma das firmas não tem mais incentivo para se antecipar ao rival. A Figura 66 mostra isso, através de uma ampliação (“zoom”) de uma região da Figura 65, mostrando apenas os valores do líder e do seguidor.

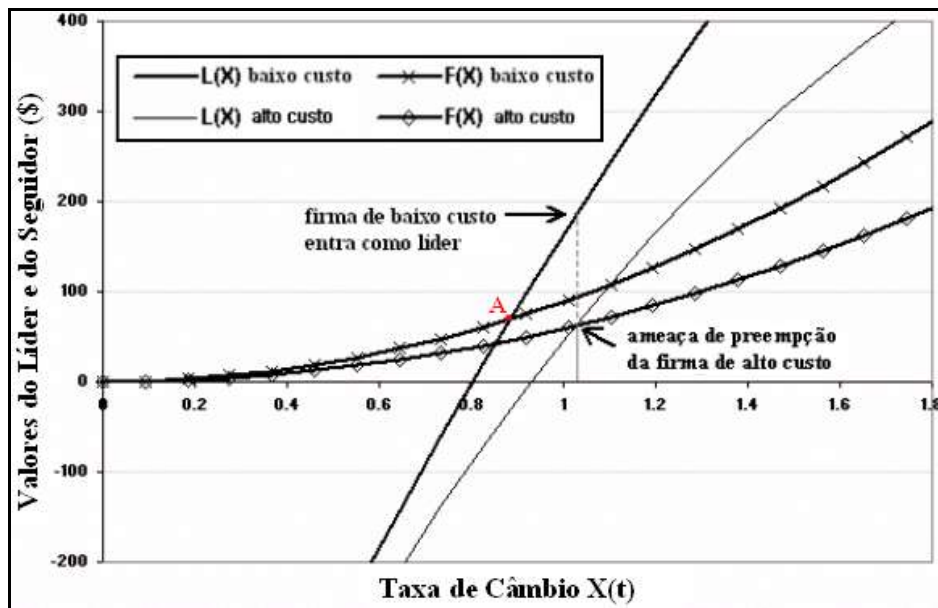


Figura 66 – Gatilho do Líder Determinado pela Ameaça de Preempção do Rival

A firma l (baixo custo) tem incentivo para se tornar líder se $L_l \geq F_l$ (ponto A da Figura 66) mas não é necessário investir nesse ponto, pois a firma de baixo custo sabe que a firma de alto custo somente terá incentivo para se tornar líder se $L_h \geq F_h$. Logo, a estratégia da firma de baixo custo para se tornar líder é investir quando $L_h = F_h$ (ou um valor infinitesimal menor).

Nesse caso X_{Ll} é o valor da taxa de câmbio onde $L_h(X_{Ll}) = F_h(X_{Ll})$ sendo que $X_{Ll} < X_{Fh}$. Nos outros casos, dependendo principalmente da diferença entre os custos operacionais c_l e c_h , a vantagem competitiva pode ser maior, desaparecendo a ameaça de preempção antes do exercício monopolista ótimo em $X = X_{Ml}$. *Nesse caso*, a vantagem competitiva é tão alta que a firma de baixo custo ignora a competição investindo no gatilho monopolista X_{Ml} . Como exemplo, aumentando c_h (de \$21, usado em Joaquin & Buttler, para \$23,5) os valores do líder e do seguidor para a firma de alto custo mostram que essa firma nunca irá querer ser líder, conforme indicada pela Figura 67. Pode-se observar que $F_h > L_h \forall X$, i. é, a curva do seguidor está sempre acima do valor do líder para a firma de (muito) alto custo. Nesse caso, é sempre melhor para a firma de alto custo ser a seguidora, esperando por uma taxa de câmbio muito favorável, nesse exemplo $X_{Fh} = 5,44$.

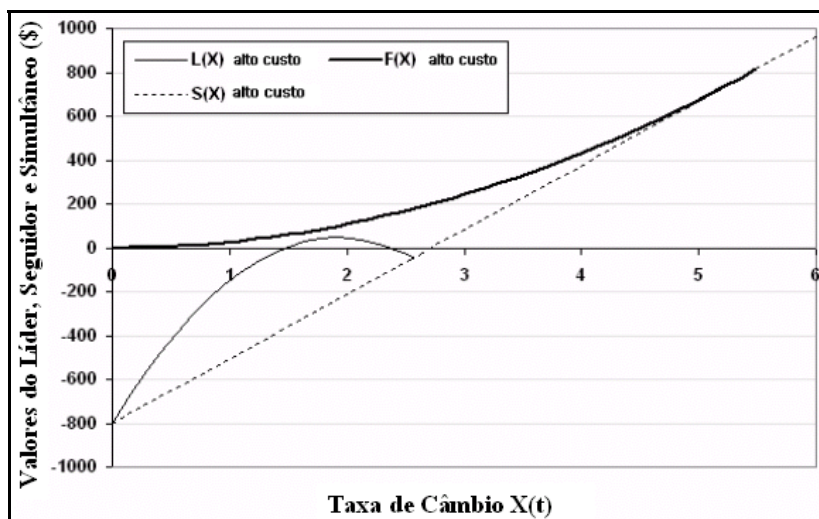


Figura 67 – Caso Sem Perigo de Preempção da Firma de Alto Custo

Para a rival firma de baixo custo, o caso da Figura 67 significa que não haverá ameaça de preempção, de forma que a firma de baixo custo pode ignorar a competição e investir no gatilho monopolista X_{MI} . Logo, o valor do gatilho do líder é o mínimo entre o seu gatilho de monopólio e o menor valor da outra firma em que essa rival teria incentivo para se tornar líder. Esse é, essencialmente, o “Result 3” do artigo de Joaquin & Buttlar (2000).

Como foi visto no item 4.2.2, para o modelo de “novo mercado” (que é o caso aqui) a colusão tácita nunca é EN. Com firmas assimétricas, essa conclusão é ainda mais forte.

Agora, imagine que o estado inicial da taxa de câmbio é tal que ambas as firmas tem incentivo para se tornarem líder. Isso ocorre quando existe uma região de taxas de câmbio em que $L > F$ para ambas as firmas. Entretanto, *ambas as firmas estariam piores em caso de exercício simultâneo da opção*, pois os valores das firmas com o investimento simultâneo são ainda menores do que os valores de seguidores para essas firmas, i. é, $S < F$ para ambas as firmas. Assim, é óbvio que, *sem comunicação* entre as firmas, existe uma probabilidade positiva de “equivoco” com o investimento simultâneo. A Figura 68 mostra essa região, que no exemplo fica compreendida entre 1,03 e $\sim 2,94$, i. é, entre X_{LI} e X_{Ph} , onde X_{Ph} é o limite superior de preempção da firma de alto custo, nessa região de preempção mostrada na Figura 68.

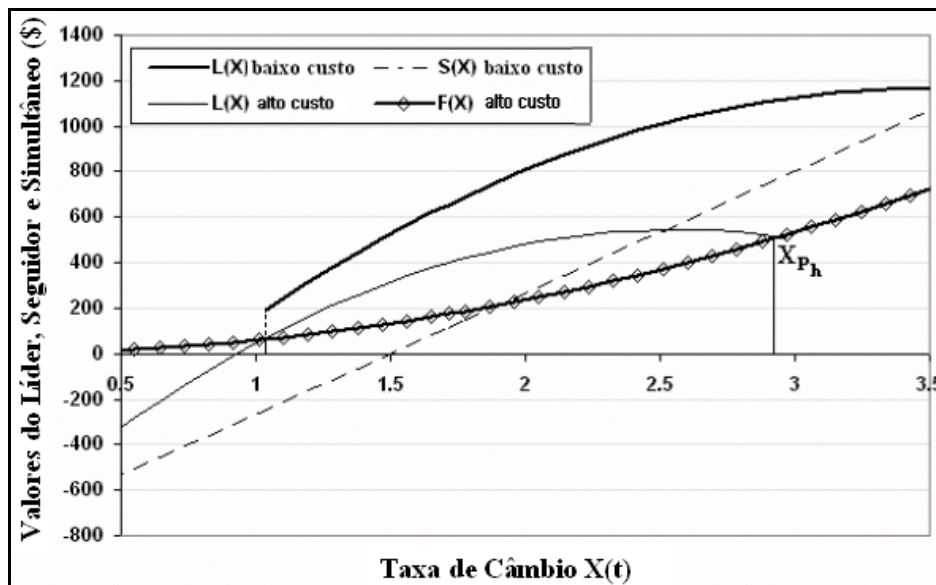


Figura 68 – Região de Preempção da Firma de Alto Custo

Note que se a firma de alto custo tem incentivos para se tornar a líder (caso da Figura 68), o mesmo ocorre com a firma de baixo custo. Entretanto, foi visto que o inverso não é necessariamente válido. Denote a região mostrada na Figura 68 de região de preempção da firma de alto custo. A existência dessa região depende dos parâmetros, especialmente da diferença entre os custos (do grau de vantagem competitiva). No caso base de Joaquin & Buttler essa região existe. Isso significa que a firma de baixo custo nessa região sofre o risco de obter o valor do exercício simultâneo (“equivoco”) em vez do “lógico” ou “natural” valor de líder quando investindo. Esse risco deve ser considerado quando se analisa esse jogo. A ameaça de exercício da firma de alto custo é crível, pois se ela investir antes, o melhor que a firma de baixo custo pode fazer é se resignar a esperar (papel de seguidora), a menos que $X \geq X_{Ph}$. Em realidade, a firma de alto custo como líder e a firma de baixo custo como seguidora, também é ENPS, mesmo sendo uma estratégia menos provável de ocorrer.

A Figura 69 mostra o mais provável ou principal ENPS com a firma de baixo custo entrando como líder e a firma de alto custo entrando como seguidora. Nessa figura aparece uma nova função valor: o valor da opção de se tornar líder. Essa função valor é calculada com o gatilho de líder X_{LI} , usando o *valor esperado do fator de desconto estocástico* (a muito útil eq. 281) para o tempo aleatório em que a variável $X(t)$ alcança X_{LI} , vezes o valor do líder para a firma de baixo custo.

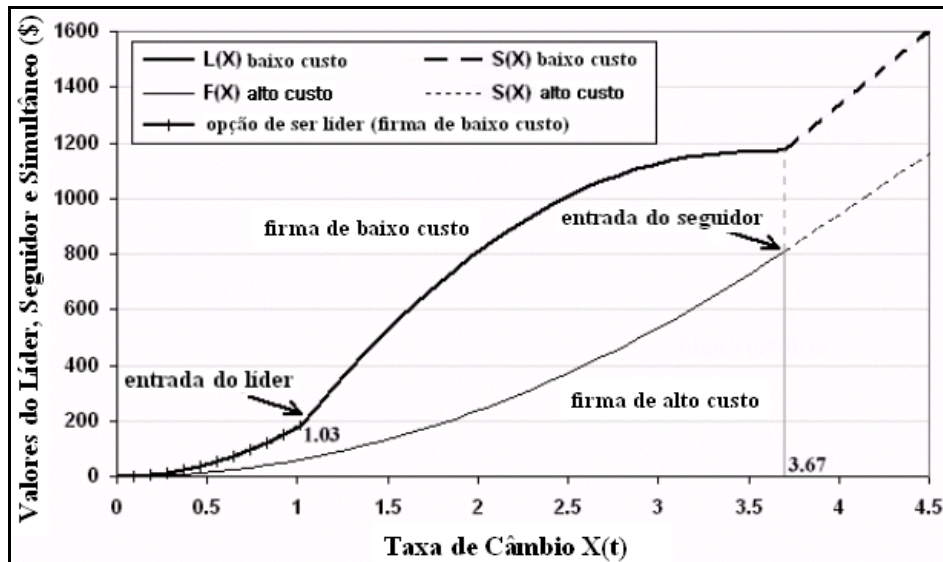


Figura 69 – Principal Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos no Duopólio Assimétrico

A Figura 70 mostra o menos provável e secundário ENPS, com a firma de alto custo entrando como líder e a firma de baixo custo entrando como seguidora.

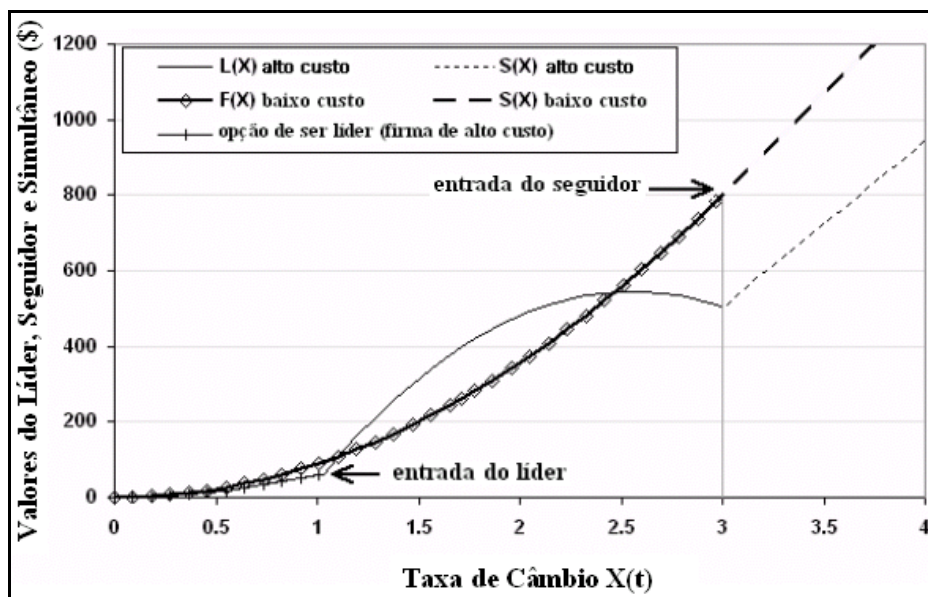


Figura 70 – ENPS Secundário no Duopólio Assimétrico

O cálculo das probabilidades ótimas para exercício das opções considerando que o rival está fazendo o mesmo, segue passos similares aos do item 4.2.2 e pode ser visto em Dias & Teixeira (2003). Aqui serão dadas só algumas conclusões gerais sobre essas estratégias mistas. Se o jogo começar com uma taxa de câmbio $X(t=0) < X_L$, então a probabilidade de ocorrer o ENPS secundário é zero, i. é, com probabilidade 1 a firma de menor custo será a líder. Entretanto, essa a probabilidade de ocorrer o ENPS secundário é estritamente positiva se X começar ($t=0$) dentro da chamada *região de preempção para a firma de alto custo*.

Além disso, dependendo dos parâmetros, existe a possibilidade de “equivoco”, i. é, o exercício simultâneo quando o ótimo seria apenas uma firma estar ativa no mercado. Lembrar que se esse “equivoco” ocorrer, o desvio não é possível, pois o investimento é irreversível.

No item 4.2.4 será mostrada uma *variação do método diferencial* para resolver problemas de oligopólio sob incerteza, com a introdução de alguns novos conceitos que ajudarão a resolver não só esse problema, como a enriquecer o conjunto de métodos de solução de jogos de OR em geral.

4.2.4. Oligopólio sob Incerteza

Esse item apresenta principalmente o modelo de oligopólio sob incerteza baseado no artigo de Grenadier (2002). Por razões de espaço, serão apresentados apenas resultados selecionados, mas com algumas simulações e gráficos não mostrados naquele artigo. Essas adições são feitas para destacar importantes conceitos tais como a comparação entre monopólio, duopólio e oligopólio em termos de produção resultante para o mesmo choque de demanda. Também será destacado o conceito de *barreira refletora superior* limitando os preços máximos em oligopólio devido ao (mesmo imperfeito) efeito da competição.

Grenadier (2002) tem pelo menos duas contribuições importantes para a literatura de jogos de OR:

- Extensão do *princípio do comportamento míope ótimo* (“principle of optimality of myopic behavior”) de Leahy para o caso de oligopólio; e
- A determinação das estratégias de exercício em oligopólio usando uma indústria “artificial” em competição perfeita, através de uma *função demanda modificada*.

Os dois “truques” simplificam a solução dos problemas porque “*o jogo de exercício pode ser resolvido como um problema de otimização de um único agente*”, de forma que novamente podem ser aplicadas as ferramentas usuais de OR em tempo contínuo. Ou seja, novamente não são necessárias técnicas mais complexas de busca de pontos-fixos de correspondências de melhor resposta dos jogadores. Se pode até mesmo usar a simulação de Monte Carlo para resolver esse modelo simulando a demanda estocástica, como será visto.

Na primeira contribuição conceitual, a firma míope (denotada por i) é uma firma que, ao considerar a sua entrada ótima no mercado, assume que toda a produção das outras firmas (denotada por Q_{-i}) permanecerão constante para sempre. Como mencionado por Dixit & Pindyck (1994, p.291), “*cada firma pode fazer a sua decisão de entrada ... como se fosse a última firma que entraria nessa indústria e então faria o cálculo padrão do valor da opção*” e “*ela pode ser totalmente míope em relação às decisões de entrada das outras firmas*”. A memorável propriedade do comportamento míope ótimo foi descoberta por Leahy (1993) e tem sido usado e estendido em várias maneiras. Ver também Baldursson & Karatzas (1997).

O artigo de Grenadier é relacionado estreitamente a Dixit & Pindyck (1994, principalmente cap. 9, seção 1; mas também os caps. 8 e 11). Em Dixit & Pindyck (cap. 9) cada firma produz só uma unidade, de forma que a produção total da indústria é igual ao número de firmas, enquanto que no modelo de Grenadier o número de firmas é fixo (n) mas cada firma pode adicionar mais que uma unidade de produção. Talvez o caminho de Grenadier para modelar o oligopólio seja mais útil e realista (uma melhora sobre Dixit & Pindyck), por ex., monopólio, duopólio e competição perfeita são casos particulares respectivamente para $n = 1, 2, e \infty$. Entretanto, para o caso de firmas assimétricas, o método de firmas com produção unitária de Dixit & Pindyck tem vantagens sobre o caminho de Grenadier, pois seria apenas um problema de ordenação (as firmas de baixo custo seriam as primeiras a entrar).

No entanto, em ambos os casos é necessário assumir a premissa de que o *investimento é infinitamente divisível* (firma i pode adicionar uma capacidade infinitesimal dq com um investimento infinitesimal dI). Apesar de ser mais realista uma premissa de adições de tamanho discreto na capacidade pelas firmas, essa abordagem pode ser uma aproximação razoável em muitas indústrias (ex., quando o novo investimento é uma fração pequena da atual capacidade instalada da indústria), especialmente para *estudos de equilíbrio da indústria*. Mas o modelo é menos realista para o *nível da decisão da firma*. Essa aproximação é necessária para permitir a extensão do princípio do comportamento míope ótimo de Leahy, o qual simplifica bastante a solução do problema. Entretanto, essa premissa não é necessária para o *caso perfeitamente competitivo* de Leahy (ver a excelente explanação de Dixit & Pindyck, cap. 8, section 2), onde a firma

competitiva analisa de forma míope um investimento *discreto* (“lump-sum”) para entrar na indústria competitiva.

A segunda contribuição de Grenadier permite a aplicação de importantes resultados obtidos para os casos de competição perfeita para os aparentemente mais complexos casos de competição imperfeita de oligopólios dinâmicos sob incerteza. Como exemplo, Grenadier apresenta uma extensão de seu artigo prévio no mercado imobiliário (“real-estate”) que considera o efeito do *tempo de construção* numa indústria perfeitamente competitiva (Grenadier, 2000b). Ele obtém soluções analíticas explícitas, simples, para as estratégias de investimento em equilíbrio, usando esse artifício esperto. Outros resultados obtidos para mercados perfeitamente competitivos poderiam também ser facilmente estendidos para o caso de oligopólio. Exemplos são os resultados de Lucas & Prescott (1971) sobre equilíbrio em expectativas racionais, Dixit (1989b) sobre modelos de histerese e Dixit (1991) para modelos de tetos (limites superiores) de preços, dentre outros resultados conhecidos.

O modelo é descrito da seguinte forma. Assuma que cada firma de um oligopólio de n -firmas tem uma seqüência de oportunidades de investimento que são como opções de compra americanas perpétuas, como o ativo básico sendo o valor de um projeto de adição de capacidade. A primeira premissa é que todas as firmas são iguais, com tecnologia para produzir um produto específico. A produção é infinitamente divisível e a unidade de preço desse produto é $P(t)$. Esse preço muda com o tempo porque a *demand* $D[X(t), Q(t)]$ evolui segundo um processo estocástico contínuo. Assuma *ou* que as firmas são neutras ao risco *ou* que o processo estocástico $X(t)$ é neutro ao risco (i. é, a tendência neutra ao risco é a tendência real menos o prêmio de risco, ver cap. 2).

Inicialmente, como no artigo de Grenadier, considere um processo de difusão estocástico mais geral dos que os mostrados no cap. 2 (ex., eq. 4):

$$dX = \alpha(X) dt + \sigma(X) dz \quad (312)$$

Considere também uma função demanda inversa mais geral do que as anteriores (mais geral, por ex., do que a eq. 265):

$$P(t) = D[X(t), Q(t)] \quad (313)$$

Para o caso do popular movimento geométrico Browniano (MGB, eq. 4), é só fazer $\alpha(X) = \alpha \cdot X$; e $\sigma(X) = \sigma \cdot X$. Como antes, α é a tendência (real), σ é a volatilidade e dz é o incremento de Wiener.

No equilíbrio perfeito de Cournot-Nash, as estratégias são quantidades e o mercado indica o preço de balanço oferta-demanda para cada estado da demanda ao longo do tempo. As firmas escolhem quantidades $q_i^*(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, maximizando seus lucros e considerando as melhores respostas dos competidores, que são as quantidades q_{-i}^* .

Com a premissa simplificadora de firmas iguais, a consequência é a escolha de EN simétricos, i. é, $q_i^*(t) = q_j^*(t)$ para todo i, j . Denote a produção total da indústria *em equilíbrio* por $Q^*(t)$. A produção ótima de cada firma nesse oligopólio simétrico de n -firmas em EN é:

$$q_i^*(t) = Q^*(t) / n \quad (314)$$

O preço de exercício da opção de adicionar a capacidade dq é o investimento $(I \cdot dq)$, onde I é o custo unitário de investimento, que é igual para todas as firmas. A opção de adicionar capacidade é exercida pela firma i quando o choque da demanda $X(t)$ alcança o nível de gatilho $X_{i}^*(q_i, Q_{-i})$.

Grenadier sumariza o equilíbrio na sua “Proposition 1”, usando o método diferencial, especificamente uma equação diferencial parcial (EDP) e três condições de contorno. A EDP é obtida usando o método de OR tradicional (Lema de Itô, portfólio livre de risco, etc.). Como usual em problemas de OR, as duas primeiras condições de contorno são as condições de continuidade e de contato suave (ver cap. 2). Entretanto, a terceira condição de contorno é uma condição de interação estratégica, requerendo que cada firma i maximize o seu valor $V_i(X, q_i, Q_{-i})$ dada as estratégias dos competidores (gatilhos).

A terceira condição de contorno é também uma *condição de continuidade, mas no gatilho dos competidores*³³¹ $X_{-i}(q_i, Q_{-i})^*$, a qual é igual a $X_i(q_i, Q_{-i})^*$ devido ao equilíbrio simétrico. A terceira condição pode ser vista também como uma busca de *pontos fixos* nos mapas de melhor resposta. Entretanto, essa condição não será necessária, conforme a “Proposition 2” de Grenadier, que estende o conceito de miopia ótima para o caso de oligopólios. Essa proposição

³³¹ Similar ao caso discutido no item 4.2.2, para a determinação da constante da eq. (290), que resultou na eq. (291), usando a condição de continuidade no ponto ótimo dos rivais.

assume que o *investimento é infinitamente divisível* (ver discussão acima) e diz que o gatilho míope da firma é igual ao gatilho estratégico da firma (ENPS em Cournot). Assim, Grenadier consegue estabelecer os principais elementos para o equilíbrio com apenas duas condições de contorno (“Proposition 3” de Grenadier).

Denote o valor da firma míope por $M^i(X, q_i, Q_{-i})$. Seja o valor marginal da produção da firma míope $m^i(X, q_i, Q_{-i})$ definido por:

$$m^i(X, q_i, Q_{-i}) = \partial M^i(X, q_i, Q_{-i}) / \partial q_i \quad (315)$$

Dada a simetria, se pode escrever $X^i(q_i, Q_{-i})^* = X^*(Q)$, pois $q_i = Q/n$ e também $Q_{-i} = (n - 1) \cdot Q / n$. A “Proposition 3” de Grenadier estabelece o EN simétrico: cada firma exercerá sua opção de investimento assim que $X(t)$ suba para o nível de gatilho $X^*(Q)$. Seja $m(X, Q)$ o *valor marginal do investimento da firma míope*. A seguinte EDO e as duas condições de contorno determinam ambas $X^*(Q)$ e $m(X, Q)$:

$$\frac{1}{2} \sigma(X)^2 m_{XX} + \alpha(X) m_X - r m + D(X, Q) + (Q/n) D_Q(X, Q) = 0 \quad (316)$$

Sujeito a :

$$m[X^*(Q), Q] = I \quad (317)$$

$$\partial m[X^*(Q), Q] / \partial X = 0 \quad (318)$$

Onde os subscritos da eq. (316) denotando derivadas parciais. A eq. (317) é a condição de continuidade em $X^*(Q)$ e a eq. (318) é a condição de suavidade. Os últimos dois termos do lado direito da eq. (316) compreende a parte não-homogênea da EDO, os chamados “termos de fluxo de caixa”. Essa parte não-homogênea jogará um papel especial no modelo de Grenadier, pois ela é a *função demanda modificada* mencionada antes. Os primeiros três termos da EDO compreendem a parte homogênea da EDO, como antes.

A beleza do modelo é que somente duas condições de contorno “de opções reais” no gatilho comum $X^*(Q)$ são *suficientes* para determinar a estratégia de exercício ótimo da opção, provada pela “Proposition 2” de Grenadier, a qual diz que o gatilho da firma míope é igual ao gatilho estratégico da firma.

Grenadier (“section 5”) mostra que, além dos casos de monopólio e de indústria perfeitamente competitiva, também é possível resolver o caso de

oligopólio como um problema de otimização de um único agente (“single agent optimization problem”). O procedimento é apenas “fingir” que a indústria é perfeitamente competitiva, maximizando uma função objetivo “fictícia”. Essa função objetivo “fictícia” usa uma função demanda artificial definida por:

$$D'(X, Q) = D(X, Q) + (Q/n) D_Q(X, Q) \quad (319)$$

Como mencionado no início desse item, esse resultado é muito importante por permitir a extensão de conhecidos (ou de fácil obtenção) resultados do caso de competição perfeita para o caso de oligopólio. Aqui será focado o caso da seção 3 do artigo de Grenadier, mas com algumas simulações adicionais não mostradas naquele artigo.

Considere um processo estocástico específico, no caso o MGB (eq. 4) para o choque da demanda $X(t)$. Considere também uma função demanda inversa específica, no caso uma curva com elasticidade da demanda constante, dada por:

$$P(t) = X(t) \cdot Q(t)^{-1/\gamma} \quad (320)$$

Onde $\gamma > 1/n$ assegura que os lucros marginais são decrescentes em X . Assuma também que a taxa de desconto livre de risco r é estritamente maior que o parâmetro de tendência³³² α . O gatilho ótimo $X^*(Q)$ é dado por:

$$X^*(Q) = v_n \cdot Q^{1/\gamma} \quad (321)$$

Onde v_n é uma barreira refletora superior, i. é, é o *preço máximo* que o produto pode alcançar no mercado oligopolista. Quando o preço alcança esse nível, as firmas adicionam capacidade numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional (exercícios de OR).

Para esse choque multiplicativo da demanda, enquanto $X(t)$ segue um MGB não-restrito, o preço $P(t)$ segue um MGB restrito pela barreira refletora superior v_n , dada por:

$$v_n = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \right) \left(\frac{1}{1 - 1/n\gamma} \right) (r - \alpha) I \quad (322)$$

Onde $\beta_1 > 1$ é a conhecida raiz positiva da equação quadrática, que aqui é: $\frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + \alpha \beta - r = 0$. Note que o gatilho $X^*(Q)$ é decrescente com a

³³² Equivale a assumir $\delta > 0$ no caso de tendência neutra ao risco (no MGB é $\alpha' = r - \delta$).

quantidade de firmas no oligopólio (n), o que parece bem intuitivo. Esse é um efeito competitivo de intensidade n , que aqui reduz o gatilho de entrada.

Para manter o preço num valor igual ou menor que v_n , a adição de capacidade dQ ($= n dq$) quando $X(t) > X^*(Q)$, com custo $I dQ$, terá de ser maior, quanto maior for a diferença $X(t) - X^*(Q)$. Em outras palavras, se $X(t) > X^*(Q)$, então $Q(t) = (X(t) / v_n)^\gamma$.

Qual o *prêmio da opção* quando se exerce essa opção estratégica no oligopólio de n -firmas? Grenadier define esse prêmio de opção como o VPL em X^* por unidade de investimento I , denotado por $OP(n)$ e dado por:

$$OP(n) = 1 / [(n \gamma) - 1] \quad (323)$$

Logo, quando n tende a infinito o prêmio da opção $OP(n)$ tende a zero, um resultado consistente com a literatura de competição perfeita (ver Dixit & Pindyck, 1994, chapter 8, que o VPL é zero para o caso de competição perfeita). Para um valor finito de n o VPL é positivo, mas cada vez menor quando aumenta o número de firmas (n) no mercado, i. é, com a intensidade da competição. No modelo do item 4.2.2 (Huisman & Kort), existe um caso especial em que o VPL de exercício de uma opção de expansão pode ser (em si) negativo, a fim de evitar a entrada do competidor que poderia ser ainda pior para as operações correntes da firma³³³. No caso da guerra de atrito (ver cap. 5) se vê o oposto: o prêmio da OR de firmas em guerra de atrito quando exercendo a sua opção como líder, pode ser maior que o tradicional (monopolista) prêmio de OR, pois existe um incentivo adicional para a espera, que é a espera pela revelação de informação.

Serão realizados alguns cálculos numéricos a fim de mostrar o poder dos conceitos acima na compreensão do equilíbrio do oligopólio sob incerteza. Serão usados os mesmos dados de entrada do artigo de Grenadier (“section 3” para a sua “Figure 1”, exceto onde indicado). Os valores são: $\alpha = 0,02$ p.a.; $r = 0,05$ p.a.; $\sigma = 0,175$ p.a.; $\gamma = 1,5$; $n = 10$ firmas; $I = 1$ \$; $Q(0) = 100$ unidades; e $X(0) = 1,74$ \$/unidade.

Um aspecto interessante e prático do *princípio do gatilho miope ótimo* é que se pode usar a simulação de Monte Carlo para resolver o modelo. Não é necessário trabalhar em retro-indução (“backwards”) porque se sabe o gatilho

³³³ Isso só ocorre quando as firmas já estão operando no mercado. No caso do “modelo de mercado novo”, isso nunca ocorre.

(“míope”) $X^*(Q(t))$ antecipadamente. Logo, se esse gatilho é atingido por um caminho simulado da demanda $X(t)$, haverá adição de nova capacidade pelas firmas oligopolistas. Assim é fácil estudar muitas propriedades advindas do exercício estratégico das OR em oligopólios e o comportamento agregado da indústria no longo prazo. Por exs., a produção da indústria $Q(t)$, os investimentos ao longo dos anos, a evolução dos preços, etc. A Figura 71 mostra algumas dessas propriedades para o caso de oligopólio com 10-firmas, mostrando uma amostra de caminho (“sample-path”) da demanda $X(t)$ num horizonte de 10 anos.

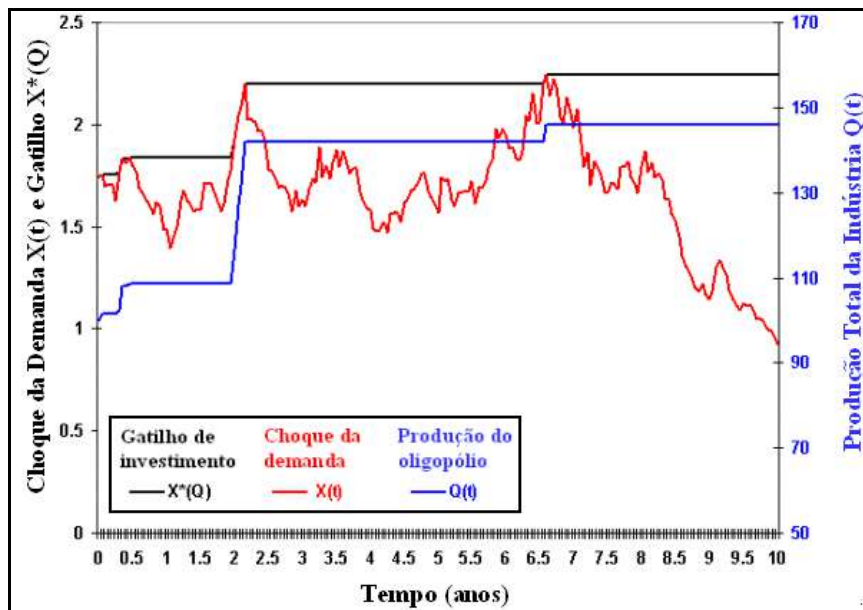


Figura 71 – Amostra da Demanda e Exercício Estratégico no Oligopólio de 10-Firmas

Na Figura 71, quando a demanda sobe até o nível de gatilho, todas as 10 firmas exercem as suas opções de expandir capacidade, aumentando a produção agregada da indústria. Nesse modelo, a adição de capacidade das firmas é proporcional à diferença entre o choque da demanda $X(t)$ e o nível de gatilho $X^*(Q(t))$, se positivo. No caso de demanda abaixo do gatilho X^* , nenhum investimento é feito (e nenhum abandono também nesse modelo). No modelo de Grenadier as firmas são iguais, de forma que no caso de oligopólio de 10-firmas, cada firma adiciona $1/10$ da nova capacidade $Q(t) - Q(t - dt)$ em caso de choque positivo em t e se $X(t) \geq X^*(Q(t - dt))$.

A Figura 71 também mostra que, para essa específica amostra de caminho, depois do ano 8 a demanda cai a níveis bem menores do que em $t = 0$, mas a produção total da indústria permanece (de forma que os preços caem). Esse modelo não considera a redução da produção da indústria devido ao estado de

baixa demanda. Um melhoramento possível desse modelo é considerar outras opções tais como a opção de parada temporária (a um certo custo) e a opção de abandono (ou pelo menos a opção de contração).

A Figura 72 mostra, para uma amostra de caminho da evolução da demanda, que a produção total da indústria $Q(t)$ é muito maior para o caso de oligopólio com 10-firmas ($n = 10$) do que para o caso de duopólio ($n = 2$), que por sua vez é maior do que o caso de monopólio ($n = 1$).

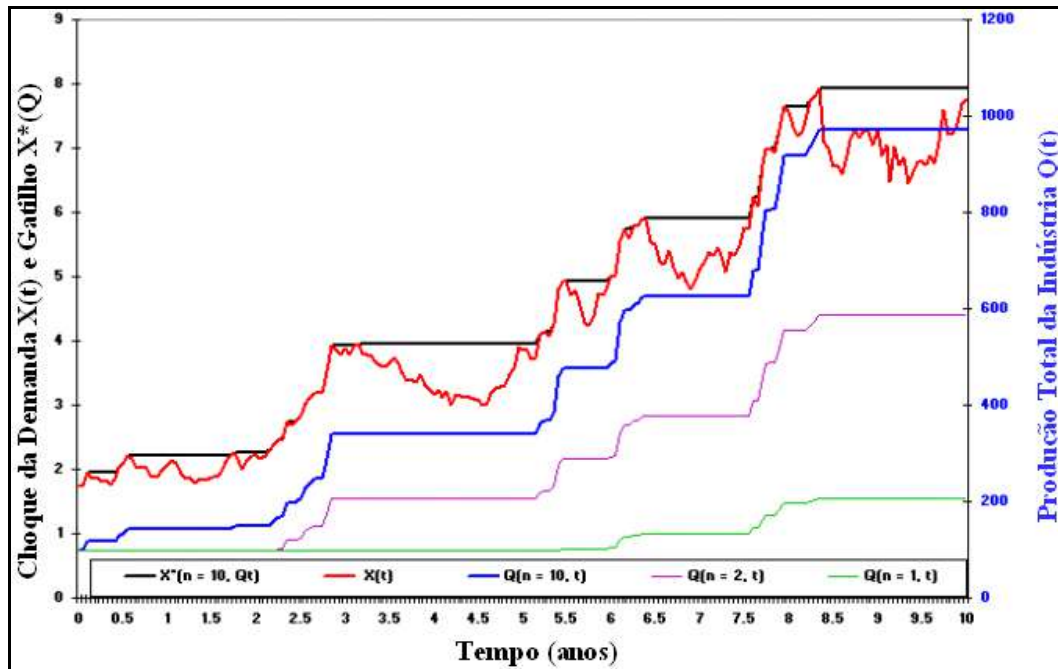


Figura 72 – Produção da Indústria sob Monopólio, Duopólio e Oligopólio (10-Firmas)

A Figura 72 mostra que, para a mesma evolução da demanda, depois de 10 anos o oligopólio com 10 firmas produz conjuntamente perto de 1000 unidades, o duopólio produz cerca de 600 unidades e o monopólio produz apenas 200 unidades (1/5 da produção do oligopólio de 10-firmas).

A Figura 73 a seguir mostra a evolução dos preços, considerando uma possível evolução da demanda com a respectiva evolução da produção do oligopólio. Note que existe uma barreira refletora superior para esses preços em $0,8081/10$ unidades, de forma que quando existe um choque positivo da demanda que faz o preço subir de forma a alcançar essa barreira refletora, a adição de capacidade do oligopólio é alta o suficiente para o preço ou se manter nesse nível (se a demanda permanecer subindo) ou ser refletido para baixo.

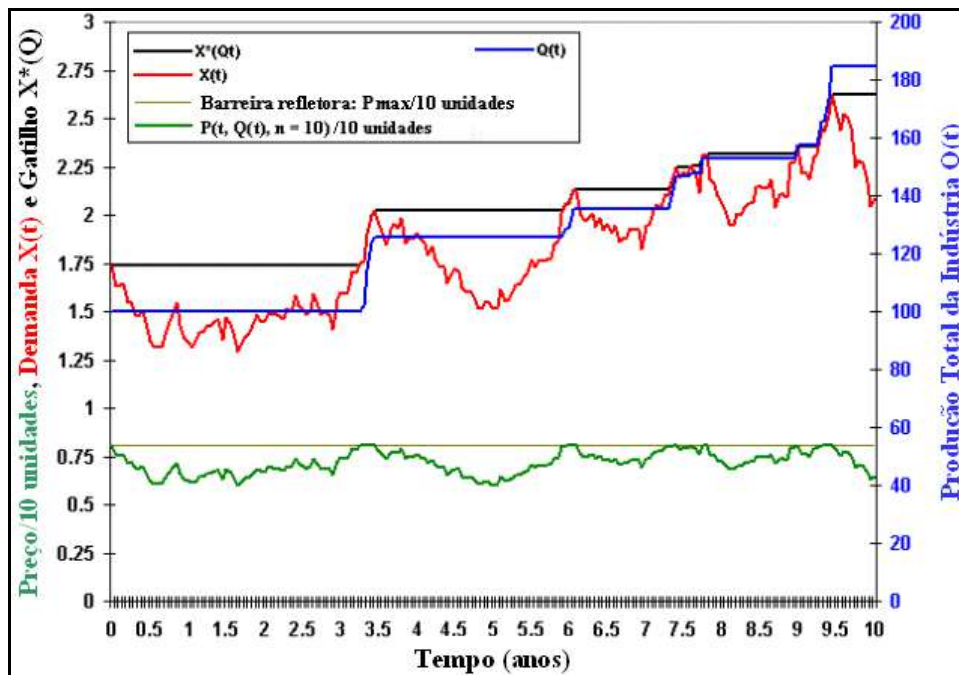


Figura 73 – Evolução de Preços e Barreira Refletora no Oligopólio de 10-Firmas

Todas as figuras apresentadas nesse item foram facilmente obtidas com as equações apresentadas e com a simulação de uma possível evolução da demanda incerta. Uma simulação de Monte Carlo mais completa daria as distribuições de probabilidades da produção, dos preços, dos investimentos na indústria, etc., para qualquer instante futuro t . Isso permitiria fazer um estudo mais realista dos oligopólios, do que é feito com a abordagem tradicional, que ignora a incerteza dinâmica da demanda.

Nesse capítulo foi visto que, em geral, existem pelo menos dois métodos para resolver os jogos de OR quando os mesmos podem ser caracterizados por estratégias simples de gatilho, o método diferencial e o integral. Isso foi mostrado na Proposição 8, que indica alguns caminhos não observados na literatura e principalmente sistematiza um conjunto de modelos de jogos de OR.

Nesse capítulo foi dada visão geral da teoria dos jogos tradicional, assim como os principais modelos analisados na literatura recente de jogos de OR. O efeito da interação estratégica pode tanto reduzir o prêmio exigido para o exercício da OR (até torná-lo negativo num caso especial), como em Grenadier, mas pode também aumentar o prêmio da espera. Esse último caso será visto numa aplicação de guerra de atrito sob incerteza que será mostrada no cap. 5.